ワインバーグ

場の量子論

1巻 粒子と量子場

S. Weinberg 著
青山秀明
有末宏明 共訳

吉岡書店

ワインバーグ
場の量子論

1巻 粒子と量子場

(原著第2刷)

S. Weinberg 著

青山秀明
有末宏明 共訳

物理学叢書
75

吉岡書店

The Quantum Theory of Fields

Volume I

Foundations

Steven Weinberg

University of Texas at Austin

Japanese translation right arranged
with Cambridge University Press, Cambridge
through Tuttle-Mori Agency, Inc., Tokyo

CAMBRIDGE
UNIVERSITY PRESS

ルイーズに

目次

（アステリスク（*）を付けた節はこの本の議論の本筋からは多少外れているので，最初読むときには飛ばしてもよい。）

2 巻 量子場の理論形式

3 巻 非可換ゲージ理論

4 巻 場の量子論の現代的諸相

---

5 巻 超対称性：構成と超対称標準模型

---

6 巻 超対称性：非摂動論的効果と拡張

I 巻の序文

なぜ, 場の理論の本がもう一冊必要なのだろうか? 今日, 場の理論を学ぶものは数ある優れた本の中から選択ができる. しかも, それらの何冊かは最新の内容を含んでいる. もう一冊の本が有用であるとしたら, それは何か新しい内容か視点を提供するものでなければならない.

内容に関しては, この本は多くの新しい題材を含んではいるが, その最大の特徴は一般性だろう. この本を通じて可能な限り一般的な枠組みで議論を進めるように努めた. これは, 一つには, 場の量子論はそれがかつて成功をおさめた量子電磁理論から遥かに遠い場面で応用されていることもあるが, それ以上に, この一般性のおかげで, 重要な点がそれぞれの特定の理論での詳細な技術面に埋もれてしまうことが避けれると思うからだ. もちろん, 量子電磁理論とともに現代の素粒子論, 原子核理論からさまざまな例をとり, 一般的な点を例証した.

しかしながら, 私がこの本を書くに至った主要な動機は, その内容よりもむしろ, その視点にある. 私の目標は, 場の量子論がなぜ今の形をとり, なぜこの形で現実の世界をうまく記述できるのかを, 読者ができるだけ明確に理解できる形で提供することだ.

伝統的なアプローチでは, ハイゼンベルグ・パウリの最初の一般的な場の量子論の論文以来, 電磁気での経験を正当化の理由とし, 場が与えられたものとして, それを「量子化」する. つまり, 種々の単純な

場の理論に正準量子化か経路積分の規則を適用する．この伝統的なやり方のうち，幾つかは1章の歴史的導入で述べる．これは確かに早く主題に入るやり方ではあるが，深く考える読者には数多くの疑問点が残る．なぜ，正準量子化や経路積分を信じなければならないのか？なぜ，文献にある単純な場の方程式やラグランジアンを採用しなければならないのか？そもそも，なぜ場などを考えるのか？私は経験に訴えることには満足がいかない．理論物理学の目的は，つまるところ，世界を我々が見たまま記述するのではなく，なぜ世界がこうなっているのかを幾つかの基本的原理から説明することにあるからだ．

この本の視点は，場の量子論は量子力学の(クラスター分解原理を含む)原理と特殊相対論の原理を調和させる(弦理論のように無限個の種類の粒子を含む理論は別として)唯一の方法だということにある．私は長年こう考えてきたが，最近になってこれはより適切な見方となった．近年になって，これまで成功を収めてきた場の理論は，量子電磁理論ですら，「有効場の理論」つまりより深いところにある理論の低エネルギーでの近似であると考えられるようになった．この深い理論は，弦理論のように場の理論とは異なる理論かも知れない．ならば，なぜ場の理論が我々の手の届くエネルギーで物理をよく記述するかというと，それはどのような相対論的な量子論も十分に低いエネルギーでは場の理論のように見えるからだ．したがって，相対論と量子論の原理から場の量子論の正当性を理解することが重要になる．また，場の理論を本当に基本的な理論と考えていたときにはくりこみ不可能性や「自明性」のようないくつかの問題には頭を悩ませたが，今ではこれらについても異なった見方をするようになった．この変化もこの本での議論に反映している．この本は，有効場の理論の時代の場の量子論の本だ．

相対論と量子論の最も直接的で確実な帰結は粒子状態の性質だ．したがって，粒子を最初に論じる．これは2章で量子論のヒルベルト空

間で非斉次ローレンツ群の表現の成分として導入する. 3章では, ダイナミクスに関する基本的な質問, すなわち遥か過去に状態が自由粒子のある集まりになっていたとして, それが将来どうなるかという質問に答えるための枠組みを用意する. 時間推進の生成子であるハミルトニアンを知っていれば, この質問には S 行列と呼ばれる遷移振幅の集まりの摂動論的展開で答えることができる. 4章ではクラスター分解原理を使って, どのようにハミルトニアンが生成・消滅演算子から構成されるかをみる. 5章ではローレンツ不変性に戻り, それがこれらの生成・消滅演算子を因果律を満たす量子場にまとまることをみる. その副産物として, CPT 定理およびスピンと統計の関係をみる. この理論形式を使って6章では S 行列を計算するためのファインマン則を導く.

7章*に至って初めて, ラグランジアンと正準形式を論じる. これらを導入する理由は, 物理の他の分野で有用であることではなく (それは充分満足のいく説明には決してならない), この形式を使うと, S 行列が必要な様々な対称性を満たすように相互作用ハミルトニアンを選ぶのが簡単だからだ. 特に, ラグランジアン密度がローレンツ不変ならば, ポアンカレ群の代数を満たす10個の演算子が存在し, 3章でみたように, これは S 行列のローレンツ不変性の証明に必要な基本条件だ. 量子電磁理論は8章でやっと現れる. 9章では経路積分を導入し, それを用いて8章で大雑把な議論で導いた量子電磁理論のファインマン則を正当化する. この経路積分の導入は, 最近流行りのやり方よりは遅い. これは, ラグランジアンが与えられたときファインマン則を導くには経路積分は確かに最短の方法だが, これらの計算の基礎となる量子力学的な理由は曖昧になると考えるからだ.

I 巻*は 10–14 章で一般の場の理論でのループ・ダイアグラムを含

*訳者注: 日本語訳では, 原著I巻を分冊し, 1-6章を1巻, 7-14章を2巻とする. また, 原著II巻も分冊し, 15-19章を3巻, 20-23章を4巻とする.

む輻射補正の計算を紹介して終る. ここでも, 配置は多少通常とは異なっている. まず, 非摂動的な方法についての章から始める. これは, それで得られる結果によって, 理論に無限大があるかどうかに関係なく, 場と質量のくりこみの必要性が理解できるからだ. 11章では量子電磁理論での有名な1ループ計算を述べる. これは, (ファインマン・パラメーター, ウィックク回転, 次元正則化, パウリ・ビラスの正則化などの) 役に立つ計算の技法を説明する機会でもあり, またくりこみを明確な例で実際に行う機会にもなっている. 11章で得た結果は12章で全次数と一般の理論に拡張し, そこでは有効場の理論に適したくりこみ不可能性についての現代的な見方も述べる. 13章では多少寄り道をして, 低エネルギーまたは揃った運動量を持つ質量ゼロの複数の粒子により引き起こされる特別の問題を論じる. 外場のもとでの電子のディラック方程式は歴史的には相対論的量子力学のほとんど初めから登場したが, この本では14章で束縛状態を扱う際に初めて登場する. これは, この方程式は (ディラックが考えたような) シュレーディンガー方程式の相対論版ではなく, 真の相対論的量子論, つまり電子と光子の場の量子論の近似として見るべきだからだ. この章の終わりではラム・シフトを扱い, 今日までにいたる理論と実験の相克について述べる.

読者には, ここで扱う内容の一部, 特に3章の一部は, 原子核理論か素粒子論の教科書に入れた方が適切だと思えるかもしれない. そうかもしれないが, 私の経験ではこれらの内容は通常全く論じられていないか, 対称性と量子論の一般原理から説き起こすことなく特定のダイナミカルな模型を使って不十分に論じられているだけだ. 時間反転不変性と終状態の位相変化の関連を聞いたこともない弦の理論家たちや, なぜ共鳴がブライト・ウィグナーの公式で扱われるのか理解していない原子核理論家たちに会ったことがある. したがって, 始めの方の章では大事を取って, これらのテーマを削るよりは含めるようにした.

II 巻では, 近年の場の量子論の復活につながった, 非可換ゲージ理論, くりこみ群, 対称性の破れ, アノマリー, インスタントン等の題材を扱う.

参考文献については, 場の量子論についての古典的な論文も, 詳細に述べなかったトピックについての有用な文献も挙げるよう努めた. ここで述べた題材で誰が最初に論じたか私は知らないものもあり, 参考文献がないからといって, この本での取扱いが最初であるという意味ではない. しかし, 幾つかは実際にそうである. 何箇所か, たとえば, 対称性演算子がユニタリーか反ユニタリーである証明, 超選択則の議論, 反転の非標準的な表現にともなう粒子の縮退の解析, クラスター分解原理の使用, LSZ 形式の導出, 外場近似の導出, 更にはラム・シフトの計算まで, もとの文献や標準的な教科書での取扱いよりは改善になっていると思う.

また, 最初の章以外では問題を与えた. この問題の一部はその章で論じた技法を使う練習であるし, 他はその章の結果がより広い種類の理論に拡張されることを示している.

場の量子論を教えていて, この I, II 巻のそれぞれが大学院の 1 年分の内容に足ると感じる. この本は非相対論的量子力学と古典電磁理論に通じた学生が取り組みやすいように努めた. また, 複素解析と行列代数の基礎知識も必要であるが, 群論とトポロジーについてはそれが必要なところで説明している.

この本は, 弱・電磁・強相互作用の標準模型で今すぐにファインマン・ダイアグラムの計算を始めたい学生には向かない. また, 高水準の数学的厳密さを求める学生にも相応しくない. 実際, この本では, 一部に数学的傾向の強い読者が涙するところもあるだろう. むしろ, 物理学者と物理を学ぶ学生が, なぜ場の量子論が現在の姿になっているかを理解し, 物理が我々の現在の理解を越えてどのように発展しようともそれに備えようとするとき, この本が役に立つだろう.

* * *

この本の題材の多くは, 何年もの間, とてもここに書き切れないほど数多くの物理学者との相互作用から学んだ. その中でも特に多くを学んだ, シドニー・コールマン (Sidney Coleman) と, テキサス大学の以下の人たちに感謝する: Arno Bohm, Luis Boya, Phil Candelas, Bryce DeWitt, Cecile DeWitt-Morette, Jacques Distler, Willy Fischler, Josh Feinberg, Joaquim Gomis, Vadim Kaplunovsky, Joe Polchinski, Paul Shapiro. 歴史的な導入部については, Gerry Holton, Arthur Miller, Sam Schweber の各氏に世話になった. Alyce Wilson 氏は図を用意し, 私が LaTeX を使えるようになるまで原稿入力をし, Terry Riley 氏は数多くの書籍・文献を見つけてくれた. 数多くの学生と同僚たち, 特に Kevin Cahill 氏はこの巻の第 1 刷での様々な誤りを見つけてくれた. ケンブリッジ・ユニバーシティ・プレスの Maureen Storey と Alison Woollatt 両氏にはこの本の出版についての努力に, また特に編集者 Rufus Neal 氏には建設的な良い助言に感謝したい.

スティーブン・ワインバーグ

テキサス州オースティン

1994 年 10 月

記法

ラテン文字 i, j, k などの添字は, 通常三つの空間座標 1,2,3 を意味する.

ギリシャ文字 μ, ν などの添字は, 通常四つの時空座標 1,2,3,0 を意味する. x^0 は時間座標.

繰り返されている添字については, 特に断らない限り, 和を取る.

時空の計量 $\eta_{\mu\nu}$ は対角であり, $\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = 1$, $\eta_{00} = -1$ ととる.

ダランベリアンは $\Box \equiv \eta^{\mu\nu}\partial^2/\partial x^\mu \partial x^\nu = \nabla^2 - \partial^2/\partial t^2$ と定義する. ここで ∇^2 はラプラシアン $\partial^2/\partial x^i \partial x^i$.

「レビ・チビタ・テンソル」$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ は $\epsilon^{0123} = +1$ を満たす完全反対称テンソル.

空間の 3 元ベクトルは太いボールド体の文字で表す.

ベクトルの上のハット記号 (ˆ) は, そのベクトルに対応する単位ベクトルを意味する. つまり, $\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$.

どの量の上の点 (˙) も, その量の時間微分を表す.

ディラック行列 γ_μ は, $\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}$ を満たすように定義され

ている. また, $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, および $\beta = i\gamma^0$ となっている.

階段関数 $\theta(s)$ は, $s > 0$ で $+1$, $s < 0$ で 0 となる関数.

行列またはベクトル A の複素共役, 転置, エルミート共役はそれぞれ, A^*, A^{T}, $A^\dagger = A^{*\mathrm{T}}$ と記す. 演算子 O のエルミート共役は $O^\dagger$ と記す. ただし, 演算子のベクトルや行列が転置されないことを強調するところではアステリスク (*) を使う. 式の終りの +H.c. または +c.c. は, それぞれ前の項のエルミート共役か複素共役の項をたすことを意味する. ディラック・スピノル u の上の棒線は, $\bar{u} = u^\dagger\beta$ を意味する.

1 章を除いては, $\hbar$ と光速を 1 にとる単位系を用いる. この本を通して, $-e$ は電子の有理系での電荷であり, 微細構造定数は $\alpha = e^2/4\pi \simeq 1/137$ となっている.

引用した数値データの終りの括弧内の数字は, そのデータの末尾の数字の不確定性を意味する. 特に述べない限り, 実験データは 'Review of Particle Properties,' *Phys. Rev.* **D50**, 1173 (1994) より引用している.

第 1 章

歴史的導入

現在, 物理の研究に熱中している我々にとっては, 他の物理学者が抱えていたほんの数年前の困難でさえ理解することは難しいし, その経験に学ぶことも難しい. しかし同時に, 歴史を知ることは両刃の剣でもある. つまり、物理の理論は常に論理的に再構成することを求められているが, 歴史の知識がその再構成にとって障害となることもありうるのだ.

この本で私は, 特殊相対論と量子力学の物理的原理から出発する演繹的な道筋を強調しながら, 場の量子論を論理的に提示することに努力した. このやり方では必然的に, 実際の発展とは異なる順序で話を展開することになる. 一例を挙げれば, 場の量子論にはマックスウェル方程式, クライン・ゴルドン方程式, ディラック方程式を含む相対論的な波動方程式の研究から発展したという側面があることは, 歴史的には正しい. このため, 場の量子論の本ではまずこれらの波動方程式を導入しそれに大きな比重を置いているが, これは自然なことだ. それにもかかわらず, もっと適切な出発点は, 粒子を非斉次ローレンツ群の表現とするウィグナーの定義だと私は長い間考えてきた. たとえこの研究が 1939 年まで発表されず, その後長年にわたって大きな影

響を与えることがなかったとしてもだ. この本では我々は粒子から出発し, 後に波動方程式に到達する.

これは粒子が必然的に場よりも本質的だという意味ではない. 1950 年以降長年にわたって, 自然法則は場の量子論の形をとると一般に考えられてきた. この本で私が粒子から出発するのは, それがより本質的だからではなくて, 我々が粒子について知っていることはより確実で, 量子力学と相対論の原理からより直接的に導くことができるからだ. もしある物理系が場の量子論では記述できないとなるとそれは大事件になるであろうが, もしその系が量子力学と相対論の法則に従わないとなればそれは天変地異というべきであろう.

実際最近, 場の理論が本質的だとする見方とは相反する動きがある. 基礎理論は場の理論でも粒子の理論でもなく, ことによると弦のような何か全く異なるものの理論かもしれない. この見方では, 我々が非常に誇りとしている量子電磁理論やその他の場の量子論は単なる「有効場理論」, すなわちもっと基礎的な理論の低エネルギー近似だということになる. 我々の場の理論が非常にうまくいっている理由はそれが本質的な真実だからではなく, どのような相対論的量子論も十分低エネルギーの粒子に適用したときには場の理論に見えるからだ. この考えに基づくと, なぜ場の量子論が現状のようになっているかを知るには, 粒子から出発しなければならない.

しかし, 我々は過去を全く忘れ去るという犠牲を払いたくはない. よって, この章では場の量子論の初期から, 最終的に現代的な形をとった 1949 年までの歴史を示す. この本の残りの章では, 歴史にこだわって物理が見えなくなることのないように努めた.

この章を書くにあたって問題となったことの一つは, 場の量子論の歴史は最初から量子力学そのものの歴史と密接に絡まりあっているということだ. 量子力学の歴史に通じている読者はこの章で, 特に量子力学を特殊相対論と融合させる初期の試みについて述べる 1 節で, す

でに知っている事柄に出会うだろう. そのような読者は, 馴染みのない箇所まで読み飛ばしてもらって構わない.

他方, 場の量子論にあまり馴染みのない読者にとっては, この章には記述が短すぎて完全には理解できない箇所があるかもしれない. そのような読者は心配しないで頂きたい. この章では場の量子論の完結した導入を意図しておらず, またこの本の残りの章の基礎として必要なわけでもない. 読者によっては, 次の章から読み始めて後で歴史に戻った方が良いかもしれない. しかし, 多くの読者にとっては場の量子論の歴史を学ぶことは場の量子論自体の良い導入になるであろう.

この章が歴史研究のオリジナルな研究だというつもりはないことをつけ加えておく. この章は本当の歴史家の本と論文, および私が読んだ歴史の回想録と物理の原論文を基にした. その大部分はこの章の終わりの関連書誌と文献一覧に示してある. 歴史的な事柄を深く知りたい読者にはこれらの文献を参照することを勧める.

記号について一言述べておく. 当時の雰囲気を保つために, この章では因子 $\hbar$ と c (そして h までも) を陽に示すが, 現代の物理学書との比較を容易にするために, 電荷にはより現代的な**有理静電単位** (rationalized electrostatic units) を使う. この単位系では, 微細構造定数 $\alpha \simeq 1/137$ が $e^2/4\pi\hbar c$ に等しくなる. 次の章以降ではほとんどの場合, 単に $\hbar = c = 1$ と置く「自然」単位系を使う.

1.1 相対論的波動力学

波動力学は相対論的波動力学として出発した. 実際, 後で見るように, 波動力学の発見者であるルイ・ドゥ・ブロイ (Louis de Broglie) とアーウィン・シュレーディンガー (Erwin Schrödinger) は着想の相当な部分を特殊相対論から得ている. 後になって初めて, 粒子数一定の相対論的量子論としての相対論的波動力学は不可能だということが, 一

般に明らかになった. このため多くの成功にもかかわらず, 相対論的波動力学は最終的には場の量子論に道を譲らなければならなかった. それでも, 相対論的波動力学は場の量子論の形式上の道具立ての重要な要素として生き残った. また場の理論にも同じだけの成功を成し遂げるという課題を残した.

物質粒子が光子のように波動で記述できる可能性は最初 1923 年にドゥ・ブロイ[1]により指摘された. 輻射との類似を除けば, 主な手がかりはローレンツ不変性だった. もし粒子が, 位置 $\mathbf{x}$, 時刻 t での位相が $2\pi(\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{x}-\nu t)$ の形をした波で記述でき, 更にこの位相がローレンツ不変ならば, ベクトル $\boldsymbol{\kappa}$ と振動数 ν は $\mathbf{x}$ と t のように, したがって $\mathbf{p}$ と E のように変換しなければならない. これが可能であるには $\boldsymbol{\kappa}$ と ν は $\mathbf{p}$ および E と同じ速度依存性を持たなければならず, よって同じ比例係数でそれらに比例しなければならない. 光子については, アインシュタイン (Einstein) の関係 $E=h\nu$ が知られているので, 物質粒子については, 光子と同様に,

$$\boldsymbol{\kappa}=\mathbf{p}/h\ ,\qquad \nu=E/h \tag{1.1.1}$$

を仮定するのが自然だ. そうすれば波動の群速度 $\partial\nu/\partial\boldsymbol{\kappa}$ は粒子の速度に等しくなり, 波束はそれが表す粒子に遅れずにちょうどついて行く.

任意の閉軌道は整数個の粒子波長 $\lambda=1/|\boldsymbol{\kappa}|$ を含むと仮定して, ドゥ・ブロイは, ニールス・ボーア (Niels Bohr) とアーノルド・ゾマーフェルト (Arnold Sommerfeld) の量子化条件を導出した. その量子化条件は, 非常に不可解だったが, 原子スペクトルをうまく説明していた. また, ドゥ・ブロイとウォルター・エルザッサ (Walter Elsasser)[2]はドゥ・ブロイの波動理論は結晶の電子散乱における干渉効果を探せば試すことができると指摘し, その効果は 2, 3 年後にクリントン・ヨゼフ・デビソン (Clinton Joseph Davisson) とレスター・ジャーマー (Lester H. Germer)[3]により確立された. しかし, ドゥ・ブロイの関係式 (1.1.1)

は, 例えば一般のクーロン場中の電子のような自由でない粒子の場合にどのように修正すべきかは依然明確ではなかった.

量子力学の歴史の次の段階, すなわちワーナー・ハイゼンベルグ (Werner Heisenberg), マックス・ボルン (Max Born), パスカル・ヨルダン (Pascual Jordan), ウォルフガング・パウリ (Wolfgang Pauli) による 1925–1926 年の行列力学[4]の発展においては, 波動力学は無視された. 行列力学を触発した少なくとも一つは, 理論はエネルギー準位や放射・吸収率のような観測量のみを含むべきだという主張だった. ハイゼンベルグの 1925 年の論文は「この論文は, 原則として観測可能な諸量の間の関係のみに基づいて, 量子力学の理論の基礎を確立することを目的とする」という声明で始まっている. 現代の場の量子論はこの理想からは程遠いが, この種の実証主義は, 例えばジョン・ホィーラー (John Wheeler) とハイゼンベルグによる S 行列の導入 (3 章を見よ) や 1950 年代に復活した分散理論 (10 章を見よ) のように, 場の量子論の歴史の様々な時点で顔を出すことになる. 行列力学についてこれ以上詳しく述べることは本題から外れることになる.

周知のように, 波動力学はシュレーディンガーによって復活した. 1926 年の一連の論文[5]で, まずよく知られた非相対論的波動方程式が提唱され, それを用いて行列力学の結果が再現された. 相対論的波動方程式はずっと後になって第 4 論文の 6 章で示された. ディラック[6]によれば実際の歴史は全く異なる. シュレーディンガーはまず相対論的方程式を導いたが, それが水素原子の微細構造の誤った結果を与えたので落胆した. そして数ヶ月後に彼は, 自分の相対論的方程式そのものは正しくないが, その非相対論的近似に意味があることに気付いた. シュレーディンガーが相対論的波動方程式を発表した時点では, それはすでにオスカー・クライン (Oskar Klein)[7]とウォルター・ゴルドン (Walter Gordon)[8]により独立に発見されており, そのためこの方程式は通常「クライン・ゴルドン」方程式と呼ばれることになった.

質量 m, 電荷 e の「ローレンツ電子」が外部ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ と クーロンポテンシャル ϕ 中にいる場合のハミルトニアン H と運動量 $\mathbf{p}$ は,

$$0 = (H + e\phi)^2 - c^2(\mathbf{p} + e\mathbf{A}/c)^2 - m^2c^4 \tag{1.1.2}$$

で関係している* が, シュレーディンガーの相対論的波動方程式は, まず最初にこの事実に気付くことがきっかけとなって導かれた. 平面波 $\exp\{2\pi i(\boldsymbol{\kappa}\cdot\mathbf{x} - \nu t)\}$ で記述される自由粒子について, ドゥ・ブロイの関係式 (1.1.1) は,

$$\mathbf{p} = h\boldsymbol{\kappa} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla} \quad , \qquad E = h\nu \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{1.1.3}$$

と同定することにより得られる. ここで, $\hbar$ は (ディラックによって後年導入された)$h/2\pi$ を表す便利な記号だ. 明らかに形式的な類似ではあるが, シュレーディンガーは, 外場 $\mathbf{A}$, ϕ 中の電子は (1.1.2) において同じ置き換えをして得られる方程式,

$$0 = \left[\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\phi\right)^2 - c^2\left(-i\hbar\boldsymbol{\nabla} + \frac{e\mathbf{A}}{c}\right)^2 - m^2c^4\right]\psi(\mathbf{x}, t) \tag{1.1.4}$$

を満たす波動関数 $\psi(\mathbf{x}, t)$ で記述されるであろうと推察した. 特に, 水素原子の定常状態については $\mathbf{A} = 0$ および $\phi = e/4\pi r$ であり, ψ は時間依存性 $\exp(-iEt/\hbar)$ を持つので, (1.1.4) は以下のようになる.

$$0 = \left[\left(E + \frac{e^2}{4\pi r}\right)^2 - c^2\hbar^2\boldsymbol{\nabla}^2 - m^2c^4\right]\psi(\mathbf{x})\,. \tag{1.1.5}$$

波動関数に対して適当な境界条件を課すとエネルギーの値[9]は,

$$E = mc^2\left[1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4}\left(\frac{n}{\ell + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4}\right) + \cdots\right] \tag{1.1.6}$$

---

*この関係はローレンツ不変だ. なぜなら $\mathbf{A}$ と ϕ は $c\mathbf{p}$ および E と同じローレンツ変換性を持つからだ. 実際にはシュレーディンガーは H と $\mathbf{p}$ を作用の偏微分で表したが, ここでの議論ではこれによる差はない.

と求まる. ここで $\alpha \equiv e^2/4\pi\hbar c$ は「微細構造定数」で約 1/137, n は正定値整数, ℓ は $\hbar$ を単位とする軌道角運動量で $0 \le \ell \le n-1$ の値をとる. α^2 項は水素スペクトル (ライマン系列, バルマー系列, 等) の大まかな特徴とよく一致する. ディラック[6]によれば, この一致のおかげでシュレーディンガーは非相対論的波動方程式を実質的に発展させることができた. 他方 α^4 項はフリードリヒ・パッシェン (Friedrich Paschen)[10]の既存の正確な測定と矛盾する微細構造を与えた.

シュレーディンガーの結果を, 旧来の量子論の法則を使って得られたゾマーフェルト[10a]の結果,

$$E = mc^2 \left[1 - \frac{\alpha^2}{2n^2} - \frac{\alpha^4}{2n^4} \left(\frac{n}{k} - \frac{3}{4} \right) + \cdots \right] \tag{1.1.7}$$

と比較することは有益だ. ここで k は 1 から n までの整数で, ゾマーフェルトの理論では軌道角運動量 $\ell\hbar$ に対して $k = \ell + 1$ だ. これは実験と一致する微細構造を与える. 例えば, $n = 2$ に対して (1.1.7) は二つの準位 ($k = 1$ と $k = 2$) を与え, それらは $\alpha^4 mc^2/32$ すなわち 4.53×10^{-5} eV だけ離れている. これは観測で確認された量だ. それに比べて, シュレーディンガーの結果 (1.1.6) は $n = 2$ に対する微細構造の分裂 $\alpha^4 mc^2/12$ を与えるが, これは観測値よりかなり大きな値だ.

シュレーディンガーはこの違いの原因が電子のスピンを無視したことにあると正しく気付いた. アルカリ原子中での逆 2 乗則に従わない電場および弱い外部磁場による原子エネルギー準位の分裂 (いわゆる異常ゼーマン効果) はボーア・ゾマーフェルト理論で説明できる状態の多重度より大きな多重度を示していた. このことから 1925 年にジョージ・ウーレンベック (George Uhlenbeck) とサミュエル・ガウシュミット (Samuel Goudsmit)[11]は, 電子が固有角運動量 $\hbar/2$ を持つことを提唱した. また, ゼーマン分裂の大きさ[12]から, 彼らは更に電子が磁気モーメント,

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc} \tag{1.1.8}$$

を持つと評価することができた. 電子のスピンが軌道角運動量と結合することは明らかだったので, シュレーディンガーの相対論的波動方程式が正しい微細構造の分裂を与えることは期待すべきでない.

実際, 1927 年までに何人かの人たち[13] は, スピン・軌道結合によりシュレーディンガーの結果 (1.1.6) と実験との矛盾を説明できることを示した. ここには実は二つの効果が含まれている. ひとつは電子が原子の静電場中を運動する際に感じる磁場と磁気モーメント (1.1.8) の直接結合だ. もうひとつはスピンを持った電子の円運動により (磁気モーメントがない場合でさえ) 引き起こされる相対論的な「トーマス歳差運動」[14]だ. これら二つの効果が一緒になって, 全角運動量 $j=\ell+\frac{1}{2}$ を持つ状態の準位がゾマーフェルトの $k=\ell+1=j+\frac{1}{2}$ の場合のエネルギー (1.1.7) にまで引き上げられ, また $j=\ell-\frac{1}{2}$ の準位がゾマーフェルトの $k=\ell=j+\frac{1}{2}$ の場合のエネルギー値にまで引き下げられることがわかった. このようにエネルギーは n と j のみに依存し, 個別には ℓ に依存しない.

$$E = mc^2\left[1-\frac{\alpha^2}{2n^2}-\frac{\alpha^4}{2n^4}\left(\frac{n}{j+\frac{1}{2}}-\frac{3}{4}\right)+\cdots\right]. \tag{1.1.9}$$

ゾマーフェルトの理論は各準位への軌道角運動量の値 ℓ の割り当てでは間違っていたが, たまたま正しい水素原子の分裂の大きさを与えた ($j+\frac{1}{2}$ は k と同じく 1 から n までの整数値をとる). しかも, いまや水素原子の微細構造準位の多重度は (ℓ の値が $j\pm\frac{1}{2}$ に対応して) $j=\frac{1}{2}$ の場合に 2 また $j>\frac{1}{2}$ の場合に $2(2j+1)$ と予言され, 実験と一致した.

このような成功にもかかわらず, 電子のスピンを最初から組み入れた完全に相対論的な理論はいまだ存在しなかった. そのような理論は 1928 年にポール・ディラック (Paul Dirac) によって発見された. しかし, 彼は単にスピンを持った電子の相対論的な理論を作ることを目ざしたわけではない. 彼は, 今日では非常に奇異に思われる疑問を提起

することによりこの問題に取り組んだ. 1928 年の最初の論文[15]で, 彼は「なぜ自然は電子に対して, 点電荷で満足せずに, この特殊な模型を選んだのだろうか」と問うたのだ. 今日の我々にとってはこの質問は, なぜバクテリアは一つの細胞しか持たないのかと問うようなものだ. スピン $\hbar/2$ を持つことは, ある粒子を電子と定義する特徴のひとつに過ぎない. 今日では種々のスピンを持つ多くの他のタイプの粒子が知られている. しかし 1928 年には, すべての物質は電子および, たぶん何かそれと似た原子核内の正電荷を持ったもので構成されていると信じることができた. だから, 当時の精神では, ディラックの疑問は「物質の基本構成粒子はなぜスピン $\hbar/2$ を持たねばならないのだろう」と言い換えることができる.

ディラックにとってこの問いに対する鍵は, 確率は正でなければならないという要求だった. 非相対論的シュレーディンガー方程式の確率密度は $|\psi|^2$ であり, この密度は,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(|\psi|^2\right) - \frac{i\hbar}{2m}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\psi^*\boldsymbol{\nabla}\psi - \psi\boldsymbol{\nabla}\psi^*\right) = 0$$

という形の連続方程式を満たすので $|\psi|^2$ の空間積分は時間に依存しないということが知られていた.[16] 他方, 相対論的なシュレーディンガー方程式の解から作ることができ, かつ保存則,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J} = 0 \tag{1.1.10}$$

を満たす唯一の確率密度 ρ と確率流 $\mathbf{J}$ は N を任意定数として,

$$\rho = N\,\mathrm{Im}\,\psi^*\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{ie\phi}{\hbar}\right)\psi\,, \tag{1.1.11}$$

$$\mathbf{J} = N\,c^2\,\mathrm{Im}\,\psi^*\left(\boldsymbol{\nabla} + \frac{ie\mathbf{A}}{\hbar c}\right)\psi \tag{1.1.12}$$

という形をしている. この ρ は (外部ポテンシャル ϕ の有無にかかわらず) 符号が一定でないので, 確率密度と同定することはできない. ディラック[17]はこの問題に関する回想録の中で以下のように述べている.

> 私がかつてコペンハーゲンにいたとき, ボーアが私に今何を研究しているのかと質問し, 私が満足のいく電子の相対論的理論を得ようとしていると答えると, ボーアは「それはクラインとゴルドンがすでにやってしまっている!」と言ったことを覚えている. その答は最初私をまごつかせた. ボーアはクラインの解に非常に満足しているようだったが, それから導かれる負の確率のゆえに私は満足できなかった. 私は正の確率のみを持つ理論を得るために研究を続けた.

ジョージ・ガモフ (George Gamow)[18] によると, ディラックはこの問題の解答を 1928 年のある晩ケンブリッジのセントジョーンズ・カレッジで壁炉を眺めながら見付けた. クライン・ゴルドン方程式あるいは相対論的シュレーディンガー方程式が負の確率を与えうる理由は, 保存則 (1.1.10) における ρ が波動関数の時間微分を含むからだと気付いた. これが起こるのは波動関数が時間に関して 2 階の微分方程式を満たすからだ. だから問題は, この波動方程式を非相対論的シュレーディンガー方程式のように時間に関して 1 階微分の別な方程式で置き換えることだった.

電子の波動関数は多成分量 $\psi_n(x)$ で,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi \tag{1.1.13}$$

の形の波動方程式を満たすと考えよう. ここで, $\mathcal{H}$ はある空間微分の行列関数だ. 理論がローレンツ不変になるためには, 方程式は時間微分について 1 階なのだから, 空間微分に関しても 1 階であり, よって $\mathcal{H}$ は $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ を定数行列として,

$$\mathcal{H} = -i\hbar c\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \alpha_4 mc^2 \tag{1.1.14}$$

という形をとると考えなければならない. (1.1.13) から 2 階微分方

程式,

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \mathcal{H}^2\psi = -\hbar^2 c^2 \alpha_i\alpha_j \frac{\partial^2\psi}{\partial x_i \partial x_j} - i\hbar mc^3(\alpha_i\alpha_4 + \alpha_4\alpha_i)\frac{\partial\psi}{\partial x_i} + m^2c^4\alpha_4^2\psi$$

を導くことができる. (ここでは和の記法を採用する. すなわち i と j は 1,2,3 または x, y, z について和がとられている.) しかしこれは, 相対論的なシュレーディンガー方程式 (1.1.4) の自由場の場合の形と一致しなければならない. その形は, 運動量とエネルギーの相対論的な関係を表している. よって, 行列 $\boldsymbol{\alpha}$ と α_4 は δ_{ij} をクロネッカーのデルタ ($i = j$ の場合 1 , $i \neq j$ の場合ゼロ), また 1 を単位行列として, 関係式,

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}1 \, , \tag{1.1.15}$$

$$\alpha_i\alpha_4 + \alpha_4\alpha_i = 0 \, , \tag{1.1.16}$$

$$\alpha_4^2 = 1 \tag{1.1.17}$$

を満たさなければならない. ディラックはこの関係式を満たす 1 組の 4×4 行列を見付けた.

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{1.1.18}$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

この形式がローレンツ不変であることを示すために, ディラックは

(1.1.13) に左から α_4 をかけ,

$$\left[\hbar c\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} + mc^2\right]\psi = 0 \tag{1.1.19}$$

という形にした. ここで,

$$\boldsymbol{\gamma} \equiv -i\alpha_4\boldsymbol{\alpha}\,, \qquad \gamma^0 \equiv -i\alpha_4 \tag{1.1.20}$$

である. (ギリシャ文字 μ, ν 等は今度は, $x^0 = ct$ として, $1,2,3,0$ の値をとる. ディラックは $x_4 = ict$ とそれに対応して $\gamma_4 = \alpha_4$ を使った.) 行列 γ^μ は反交換関係,

$$\frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu) = \eta^{\mu\nu} \equiv \begin{cases} +1 & \mu = \nu = 1,\,2,\,3 \\ -1 & \mu = \nu = 0 \\ \ \ 0 & \mu \neq \nu \end{cases} \tag{1.1.21}$$

を満たす. ディラックはこの反交換関係は, Λ を任意のローレンツ変換として, 行列 $\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$ もこの関係を満たすという意味で, ローレンツ不変であることに気付いた. このことから $\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu$ は γ^μ と相似変換,

$$\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu = S^{-1}(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda)$$

で結びついていなければならないと結論した. そうすると, もしローレンツ変換 $x^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ のもとで波動関数が行列による変換 $\psi \to S(\Lambda)\psi$ を受けるならば, 波動方程式は不変になる. (これらのことは5章でかなり異なった観点から, より完全に議論する.)

任意の外部電磁場のもとでの電子の振舞いを研究するため, ディラックは (1.1.4) と同様に「通常の処方」,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\phi \qquad -i\hbar\boldsymbol{\nabla} \to -i\hbar\boldsymbol{\nabla} + \frac{e}{c}\mathbf{A} \tag{1.1.22}$$

に従った. 波動方程式 (1.1.13) はそのとき,

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + e\phi\right)\psi = (-i\hbar c\boldsymbol{\nabla} + e\mathbf{A})\cdot\boldsymbol{\alpha}\psi + mc^2\alpha_4\psi \tag{1.1.23}$$

という形をとる. ディラックはこの方程式を, 中心力場内での角運動量保存則が,

$$[\mathcal{H},\ -i\hbar\mathbf{r}\times\boldsymbol{\nabla}+\hbar\boldsymbol{\sigma}/2]=0 \tag{1.1.24}$$

の形をとることを示すのに用いた. ここで, $\mathcal{H}$ は行列微分演算子 (1.1.14) , また $\boldsymbol{\sigma}$ はそれ以前にパウリ[19]によって導入されたスピン行列の 4×4 版だ.

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}\quad. \tag{1.1.25}$$

$\boldsymbol{\sigma}$ の各成分は固有値 ±1 を持つので, (1.1.24) の余分な項の存在は電子が固有角運動量 $\hbar/2$ を持つことを示している.

ディラックはまた (1.1.23) を繰り返して, 2 階微分方程式を得た. それは, 右辺に二つの付加項,

$$[-e\hbar c\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}-ie\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{E}]\,\psi \tag{1.1.26}$$

が存在することを除けば, 全くクライン・ゴルドン方程式 (1.1.4) と同じ形になった. 速度の遅い電子の場合, 第 1 項が優勢で, これが表す磁気モーメントはガウシュミットとウーレンベック[11]が見付けた値 (1.1.8) に一致する. ディラックが気付いたように, この磁気モーメントは, 理論の相対論的性質とあいまって, この理論がハイゼンベルグ, ヨルダン, チャールズ・ダーウィン (Charles G. Darwin)[13]により見いだされた微細構造の分裂と (α^4mc^2 の次数まで) 一致する分裂を与えることを保証する. 少し後に, ディラック理論における水素原子のエネルギー準位の「厳密な」公式がダーウィン[20]とゴルドン[21]により導

かれた.

$$E = mc^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{\left\{ n - j - \frac{1}{2} + \left[\left(j + \frac{1}{2} \right)^2 - \alpha^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^2} \right)^{-1/2} . \qquad (1.1.27)$$

α^2 についての級数展開の最初の 3 項は近似的な結果 (1.1.9) と一致している.

正の確率をもった相対論的な形式というディラックの所期の目的を, この理論は達成した. (1.1.13) から連続方程式,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \qquad (1.1.28)$$

を導くことができる. ここで,

$$\rho = |\psi|^2 , \qquad \mathbf{J} = c\psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi \qquad (1.1.29)$$

である. よって正の量 $|\psi|^2$ は, 一定の全確率 $\int |\psi|^2 d^3x$ をもった確率密度と解釈できる. しかし, ディラックがすぐには解決できなかった別の困難が存在した.

与えられた運動量 $\mathbf{p}$ に対して, 波動方程式 (1.1.13) は四つの平面波解,

$$\psi \propto \exp \left[\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et) \right] \qquad (1.1.30)$$

を持つ. $E = +\sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ の二つの解は電子の $J_z = \pm\hbar/2$ を持つ二つのスピン状態に対応する. 残りの二つの解は $E = -\sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ をもち, 明確な物理的解釈ができなかった. ディラックが指摘したように, この問題は相対論的なシュレーディンガー方程式の場合にも起こる. 各 $\mathbf{p}$ に対して, (1.1.30) の形の二つの解があり, 一つは正の E, 一つは負の E を持つ.

もちろん, 古典物理においてさえ, 相対論的な関係式 $E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ は二つの解 $E = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ を持っている. しかし, 古典物

理では物理的な粒子は正の E をもったものだけだと仮定することができる. 正エネルギー解は $E > mc^2$ をもち負エネルギー解は $E < -mc^2$ を持つので, その間には有限の隔たりがあり, 連続的な過程では粒子のエネルギーを正から負に変えることはできない.

負エネルギーの問題は相対論的な量子力学では厄介だ. ディラックが 1928 年の論文[15]で指摘したように, 電子と輻射の相互作用によって, 正エネルギー電子が負エネルギー状態に落ち込み, その際 2 個以上の光子によりエネルギーが持ち去られる遷移が可能だ. それなら物質はなぜ安定であり得るのか?

1930 年にディラックは驚くべき解決法[22]を提唱した. ディラックの提案は排他原理に基づいているので, ここでこの原理の歴史について二, 三述べておこう.

元素の周期律表と系統的な X 線分光学の両方から, 1924 年までには電子による原子のエネルギー準位の分布が明らかになっていた.[23] すなわち, 主量子数 n で特徴づけられる殻内の電子数の最大値 N_n はその n をもった軌道状態の数の 2 倍だ.

$$N_n = 2\sum_{\ell=0}^{n-1}(2\ell+1) = 2n^2 = 2,\ 8,\ 18, \ldots . \tag{1.1.31}$$

パウリ[24]は 1925 年に, N_n が n 番目の殻内の可能な全状態数であり, かつ 2 個以上の電子が同じ状態を占有することを禁止する何か不可解な「排他原理」が存在するなら, このパターンは理解できることを示唆した. 彼は, (1.1.31) の不可解な因子 2 は電子状態の「古典的には記述できない特殊な 2 重性」のためだとした. すでに見たように, これはすぐ後に電子のスピンのためだと理解された.[11] 排他原理は, なぜ重い原子内の全ての電子は最低エネルギー殻に落ち込まないのかという, ボーアとゾマーフェルトの古い原子論では曖昧なまま残されていた疑問に答えた. やがてパウリの排他原理は何人かの人たち[25]によって, 多電子系の波動関数は全電子の軌道とスピンの座標について

反対称だという要求として定式化された. この原理はエンリコ・フェルミ (Enrico Fermi)[26]とディラック[27]によって統計力学に持ち込まれ, このため排他原理に従う粒子は一般に「フェルミオン」と呼ばれている. 同様に光子のように波動関数が対称でボースとアインシュタインの統計に従う粒子は「ボソン」と呼ばれている. 排他原理は化学や原子物理ばかりでなく, 金属の理論, 白色矮星および中性子星等において本質的な役割を果たした. これらの事項を議論していると本題から離れすぎるのでやめておく.

ディラックの提案は, 「少数の低速の状態を除いて負エネルギーの全状態が占有されている」ため正エネルギー電子は負エネルギー状態へ落ち込めないというものだった. 負エネルギー電子の海の中の少数の空の状態, すなわち「空孔」は, 正エネルギーと正電荷という逆の量子数をもった粒子のように振舞う. その当時知られていた正電荷を持つ唯一の粒子は陽子であり, ディラックが後に回想しているように,[27a]「当時の世論全体は新粒子に反対していた」ので, ディラックはこの空孔を陽子とみなした. 実際, 彼の 1930 年の論文[22]の題名は「電子と陽子の理論」だった.

空孔理論は即座にいくつかの困難に直面した. 一つの明らかな問題は至る所にある負エネルギー電子の無限大の電荷密度だった. すなわち, その電場はどこに行ってしまったのかということだ. ディラックはマックスウェル方程式に現れる電荷密度を「世界の通常の帯電状態からのずれ」と再解釈するよう提案した. 別の問題は観測される電子と陽子の質量と相互作用が大きく異なっていることと関係している. ディラックは, 電子間のクーロン相互作用がこれらの差異をどうにかして説明すると期待したが, ハーマン・ワイル (Hermann Weyl)[28]は空孔理論が実際負電荷と正電荷の間で完全に対称であることを示した. 最後にディラック[22]は, 正エネルギー電子が負エネルギー電子の海の正孔と出会い, 占有されていない準位に落ち込んでガンマ線光子対を

放射する電子・陽子消滅過程の存在を予言した. これ自身は空孔理論に困難をもたらしたわけではなく, これが当時は知られていなかった星のエネルギー源の説明を与えると期待する人さえいた. しかし, 原子内での電子・陽子消滅はあまりにも高率で起こり普通の物質に見られる安定性と矛盾すると, ジュリアス・ロバート・オッペンハイマー (Julius Robert Oppenheimer) とイゴール・タム (Igor Tamm) によってまもなく指摘された.[29] このため, 1931 年までにディラックは考えを改めて, 空孔は陽子としてではなく電子と同じ質量を持つ正電荷の新種の粒子として現れるだろうと結論づけた.[29a]

これらの問題の 2 番目と 3 番目はカール・アンダーソン (Carl D. Anderson)[30]が陽電子を発見したことで解決した. ちなみにアンダーソンはディラックによる予言を知らなかったようだ. 1932 年 8 月 2 日に 15 kG の磁場中におかれたウィルソンの霧箱に奇妙な宇宙線の飛跡が観測された. その飛跡は正電荷の粒子に期待される方向に曲がっているのが観測されたが, その飛程は陽子に期待される飛程より少なくとも 10 倍は長かった. その飛跡の飛程と比電離能はともに, この粒子が, ディラックの空孔の一つに期待されるとおりに, 電子とは電荷の符号だけが異なる新粒子だと仮定するとよく合っていた. (この発見はブラケット (P. M. S. Blackett) によりそれ以前になされていたが, 彼はすぐにはそれを発表しなかった. アンダーソンはブラケットとギュゼッペ・オキアリニ (Giuseppe Occhialini) が得た宇宙線飛跡中の軽い正粒子の証拠の新聞報道を引用している.) このようにディラックは最初に空孔を陽子と見なした点でのみ間違っているように見えた.

ともかく予言された陽電子の発見は, それ以前にディラック方程式が電子の磁気モーメントと水素原子の微細構造を説明するのに成功したことと合わせて, ディラック理論に 60 年以上にわたる名声を与えた. ディラック理論が将来の物理理論の中で何らかの形で生き残るであろうことはほとんど疑いないが, しかし, もともとの原理には満

足できない深い理由がある.

(i) ディラックによるシュレーディンガーの相対論的波動方程式における負エネルギー確率の問題の解析によれば, どのようなスピンゼロ粒子の存在も排除されるように思われる. しかし 1920 年代にも, 例えば基底状態の水素原子やヘリウム原子核のように, スピンゼロ粒子は知られていた. もちろん, 水素原子とアルファ粒子は基本粒子ではないので, 相対論的波動方程式で記述される必要はないと論じることもできるが, 基本粒子という考え方が相対論的量子力学の形式の中にどのように組み込まれるのかは明らかでなかった (今も明らかではない). 今日では π 中間子, K 中間子等, 陽子や中性子より基本的でないとはいえない多くのスピンゼロ粒子が知られている. また電子やその他の粒子と同じくらい基本的と思われる $W^\pm$ や Z^0 というスピン 1 の粒子も知られている. 更に今日では, 強い相互作用の効果を除けば, 原子核に束縛されたスピンゼロの負の π または K 中間子からできた「中間子原子」の微細構造を, 相対論的クライン・ゴルドン・シュレーディンガー方程式の定常解から計算できる! このように, ディラック方程式が発展する原動力となったスピンゼロ粒子の相対論的方程式になにか本質的に誤ったところがあるという意見に同意することは難しい. 問題は単に, 電子がたまたまゼロではなく $\hbar/2$ のスピンを持っていることだ.

(ii) 我々が現在知る限り, あらゆる種類の粒子には同一質量と逆電荷をもった「反粒子」が存在する. (光子のようないくつかの純粋な中性粒子は自分自身の反粒子だ.) しかしどうすれば $\pi^\pm$ 中間子や $W^\pm$ 粒子のような荷電ボソンの反粒子を負エネルギー状態の海の空孔と解釈できよう. ボース・アインシュタイン統計の法則に従って量子化される粒子には排他原理は適用されないので, 負エネルギー状態が占有されているか否かに関わらず, 正エネルギー粒子がそこに落ち込むこ

とは妨げられない. そして, 空孔理論がボソンの反粒子にはうまく機能しないのならば, どうしてフェルミオンに対してそれを信じることができよう. 1972 年に私がディラックに, この点について彼がどう感じているかを尋ねると, 彼は π 中間子や $W^{\pm}$ のようなボソンを「重要」とは思っていないと私に言った. 数年後の講演[27a]でディラックは, ボソンについては「我々はもはや負エネルギー状態が満たされている真空という描像は持っていない」という事実に言及し, この場合には「理論全体がより複雑になる」と述べた. 反粒子を空孔とする解釈は残念ながら多くの教科書に残っているけれども, 如何にして場の量子論の発展によりその必要がなくなったかを次の節で示す. ジュリアン・シュウィンガー (Julian Schwinger)[30a]を引用すれば, 「負エネルギー電子の無限の海という描像はいまや歴史的骨董品と見なし忘れ去るのが最良だ.」

(iii) ディラック理論の大きな成功の一つは電子の磁気モーメントを精確に予言したことだ. 磁気モーメント (1.1.8) は角運動量 $\hbar/2$ を持つ荷電粒子の軌道運動から期待される値の 2 倍だから, これは特に驚くべきだ. この因子 2 はディラック理論が出るまで謎のままだった. しかし実際には, ディラックの議論では磁気モーメントの値はこの特別な値に一意的に決まらない. 我々が波動方程式 (1.1.23) に電場と磁場を導入した際に, 任意係数 κ を持つ「パウリ項」[31],

$$\kappa\alpha_4[\gamma^\mu,\gamma^\nu]\psi F_{\mu\nu} \tag{1.1.32}$$

を加えることもできた. (ここで $F_{\mu\nu}$ は, $F^{12}=B_3$, $F^{01}=E_1$ 等, 通常の電磁場の強度テンソルだ.) この項を得るには, まず自由場の方程式にもちろんゼロに等しい $[\gamma^\mu,\gamma^\nu](\partial^2/\partial x^\mu\partial x^\nu)\psi$ に比例する項をつけ加え, 次に前のように (1.1.22) の置き換えをすればよい. もっと現代的なとらえ方では, (1.1.32) の項はローレンツ不変性とゲージ不変性を含む一般に受け入れられている全ての不変性原理と矛盾しない

ので, そのような項が場の方程式から排除される理由はない. (12.3 節を見よ.) この項は電子の磁気モーメントに κ に比例する余分な寄与をする. よって純粋に形式上単純になることを除けば, ディラック理論の電子の磁気モーメントに何ら特別な値を期待する理由はなかったのだ.

この本で見るように, これらの問題は結局全て場の量子論の発展を通して解決される (少なくとも明らかにされる) べきだった.

1.2 場の量子論の誕生

光子は粒子として検出される以前に場として知られていた唯一の粒子だ. だから場の量子論が最初は輻射と関連して発展し, その後他の粒子や場に適用されたのは自然なことだ.

1926 年に行列力学に関する中心的な論文の中で, ボルン, ハイゼンベルグ, ヨルダン[32]は自由輻射場に彼らの新しい方法を適用した. 簡単のため彼らは電磁波の偏極を無視し, 0 から L まで動く座標 x の 1 次元空間で議論した. 輻射場 $u(x,t)$ は, この両端でゼロになるように条件を付ければ, 両端が $x=0$ と $x=L$ で固定された弦の変位と同じ振舞いをする. 弦または完全な電磁場の場合との類推から, ハミルトニアンには,

$$H = \frac{1}{2}\int_0^L \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right\} dx \tag{1.2.1}$$

という形が採用された. この表現を 2 乗和に変形するために, 場 u は $x=0$ と $x=L$ の両方で $u=0$ を満たすフーリエ成分の和で次のように表された.

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \sin\left(\frac{\omega_k x}{c}\right) , \tag{1.2.2}$$

$$\omega_k \equiv k\pi c/L\,. \tag{1.2.3}$$

その結果,

$$H = \frac{L}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\dot{q}_k^2(t) + \omega_k^2 q_k^2(t)\right\} \tag{1.2.4}$$

が得られる. このように弦あるいは場はポール・エーレンフェスト (Paul Ehrenfest)[32a]が 20 年以前に予期していたように, 角周波数 ω_k の独立な調和振動子の和のように振舞う.

特に, $q_k(t)$ に正準共役な「運動量」 $p_k(t)$ は, 粒子力学と同様に, H を p と q の関数として表したとき,

$$\dot{q}_k(t) = \frac{\partial}{\partial p_k(t)}\,H(p(t), q(t))$$

となるように決定される. これより「運動量」は,

$$p_k(t) = \frac{L}{2}\,\dot{q}_k(t) \tag{1.2.5}$$

となり, 正準交換関係は,

$$\Big[\dot{q}_k(t), q_j(t)\Big] = \frac{2}{L}\Big[p_k(t), q_j(t)\Big] = \frac{-2i\hbar}{L}\,\delta_{kj}\,, \tag{1.2.6}$$

$$\Big[q_k(t), q_j(t)\Big] = 0 \tag{1.2.7}$$

と書ける. また, $q_k(t)$ の時間依存性はハミルトンの運動方程式,

$$\ddot{q}_k(t) = \frac{2}{L}\,\dot{p}_k(t) = -\frac{2}{L}\,\frac{\partial H}{\partial q_k(t)} = -\omega_k^2 q_k(t) \tag{1.2.8}$$

で決定されている.

(1.2.6)-(1.2.8) で定義される行列の形は, 調和振動子に関する以前の研究を通じてボルン, ハイゼンベルグ, ヨルダンには既知のものだった. q 行列は,

$$q_k(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{L\omega_k}}\,\Big[a_k \exp(-i\omega_k t) + a_k^\dagger \exp(+i\omega_k t)\Big] \tag{1.2.9}$$

で与えられる．ここで a_k は時間に依存しない行列，また $a_k^\dagger$ はそのエルミート共役行列で，交換関係，

$$\left[\, a_k \;,\; a_j^\dagger \,\right] = \delta_{kj} \;, \tag{1.2.10}$$

$$\left[\, a_k \;,\; a_j \,\right] = 0 \tag{1.2.11}$$

を満たす．これらの行列の行と列は，各基準振動に一つずつ対応する正の整数 n_1, $n_2, \ldots$ の添字を持っている．その行列要素は，

$$(a_k)_{n_1',n_2',\ldots,n_1,n_2\ldots} = \sqrt{n_k}\,\delta_{n_k',n_k-1}\prod_{j\neq k}\delta_{n_j' n_j} \;, \tag{1.2.12}$$

$$(a_k^\dagger)_{n_1',n_2',\ldots,n_1,n_2\ldots} = \sqrt{n_k+1}\,\delta_{n_{k'}',n_k+1}\prod_{j\neq k}\delta_{n_j' n_j} \tag{1.2.13}$$

だ．一つの基準振動については，この行列は陽に，

$$a = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & & & \\ . & . & . & . & & & \\ . & . & . & . & & & \end{bmatrix},$$

$$a^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & & & \\ . & . & . & . & & & \\ . & . & . & . & & & \end{bmatrix}$$

と書かれる．(1.2.12) と (1.2.13) が交換関係 (1.2.10) と (1.2.11) を満たすことは容易に確かめることができる．

整数成分 $n_1, n_2, \ldots$ を持つ列ベクトルは, 各基準振動 k に n_k 個の量子を持つ状態を表すと物理的に解釈する. そのような列ベクトルにかかる行列 a_k または $a_k^\dagger$ は $\ell \neq k$ のすべての n_ℓ をそのままにして, n_k をそれぞれ 1 単位だけ下げるかまたは上げる. だからそれらは k 番目の基準振動の量子を一つ消滅させるかあるいは生成する演算子と解釈できる. とくに, すべての n_k がゼロに等しいベクトルは真空を表し, 任意の a_k により消滅させられる.

この解釈は更にハミルトニアンを見れば支持される. (1.2.9) と (1.2.10) を (1.2.4) に使うと,

$$H = \sum_k \hbar\omega_k \left(a_k^\dagger a_k + \tfrac{1}{2} \right) \tag{1.2.14}$$

が得られる. ハミルトニアンは n 表示では対角的だ.

$$(H)_{n_1', n_2', \ldots, n_1, n_2 \ldots} = \sum_k \hbar\omega_k \left(n_k + \tfrac{1}{2} \right) \prod_j \delta_{n_j' \, n_j} \, . \tag{1.2.15}$$

状態のエネルギーはちょうど, その状態中に存在する各量子のエネルギー $\hbar\omega_k$ の和に無限大のゼロ点エネルギー $E_0 = \frac{1}{2}\sum_k \hbar\omega_k$ を加えたものであることがわかる. この形式を輻射場に適用することにより, 輻射の状態数を各基準振動の量子数 n_k に従って数えるボースの方法が正しいことが示された.

ボルン, ハイゼンベルグ, ヨルダンはこの形式を黒体輻射のエネルギーのゆらぎの 2 乗平均を導くのに用いた. (彼らがこのために実際に使ったのは交換関係 (1.2.6) と (1.2.7) のみだった.) しかしこの方法は, より焦眉の問題だった輻射の自然放出率の計算にもすぐに適用された.

ここでの困難を理解するためには時間を若干さかのぼる必要がある. ボルンとヨルダン[33]は行列力学に関する最初の論文の一つで, 原子は, ある状態 β からエネルギーの低い状態 α へ落ちる際に, 変位,

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_{\beta\alpha} \exp(-2\pi i \nu t) + \mathbf{r}_{\beta\alpha}{}^* \exp(2\pi i \nu t) \tag{1.2.16}$$

を持つ古典的な荷電振動子とちょうど同じように輻射を放出すると仮定していた. ここで,

$$h\nu = E_\beta - E_\alpha \, . \tag{1.2.17}$$

また $\mathbf{r}_{\beta\alpha}$ は電子の位置行列の β, α 要素だ. そのような振動子のエネルギー E は,

$$E = \frac{1}{2}m\left(\dot{\mathbf{r}}^2 + (2\pi\nu)^2\mathbf{r}^2\right) = 8\pi^2 m\nu^2|\mathbf{r}_{\beta\alpha}|^2 \tag{1.2.18}$$

だ. 簡単な古典的計算により放射強度が与えられ, 光子当たりのエネルギー $h\nu$ で割ると光子の放出率が得られる.

$$A(\beta \to \alpha) = \frac{16\pi^3 e^2 \nu^3}{3hc^3}|\mathbf{r}_{\beta\alpha}|^2 \, . \tag{1.2.19}$$

しかし, なぜ自然放出を取り扱う際に, 古典的双極子による輻射放出の公式がこのように引き継がれるのか全く明らかでなかった.

少し後に, より間接的ではあるがもっと確信の持てる導出がディラック[34]によって与えられた. 彼は, (1.2.17) の振動数での単位振動数間隔当たりのエネルギー密度が u である古典的振動電磁場中での量子化された原子状態の振舞いを考察して, 吸収率 $uB(\alpha \to \beta)$ と誘導放出率 $uB(\beta \to \alpha)$ の式,

$$B(\alpha \to \beta) = B(\beta \to \alpha) \simeq \frac{2\pi^2 e^2}{3h^2}|\mathbf{r}_{\beta\alpha}|^2 \tag{1.2.20}$$

を導くことができた. (右辺の表現は, $\mathbf{r}_{\alpha\beta}$ が $\mathbf{r}_{\beta\alpha}{}^*$ に等しいため, 状態 α と β の間で対称だ.) アインシュタイン[34a]はすでに 1917 年に原子と黒体輻射の熱平衡が可能性であるためには自然放出率 $A(\beta \to \alpha)$ と誘導放出率または吸収率 uB の間に,

$$A(\beta \to \alpha) = \left(\frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\right)B(\beta \to \alpha) \tag{1.2.21}$$

という関係が要求されることを示した. この関係式と (1.2.20) を用いるとただちに自然放出率に対するボルン・ヨルダンの結果 (1.2.19) が

得られる. それでも, 単一原子を含む過程に関する式に熱力学の議論が必要であるのは依然不満に思われた.

最終的に, 1927 年にディラック[35]は自然放出の完全に量子力学的な取扱いに成功した. ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ は (1.2.2) のように基準振動で展開され, その係数は (1.2.6) のような交換関係を満たすことが示された. その結果, 自由輻射場の各状態は各基準振動毎に一つずつ対応する整数 n_k の組で指定され, また電磁相互作用 $e\dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{A}$ の行列要素は (1.2.10)–(1.2.13) で定義される行列 a_k と $a_k^\dagger$ に比例する行列係数を持つ基準振動の和の形をとる. ここで重要な結果は (1.2.13) の因子 $\sqrt{n_k+1}$ だ. すなわち, 基準振動 k の光子の数が n_k から n_k+1 に増える遷移の確率はこの因子の 2 乗 n_k+1 に比例する. しかし基準振動 k に n_k 個の光子を持つ輻射場では, 振動数間隔当たりのエネルギー密度 u は,

$$u(\nu_k) = \left(\frac{8\pi\nu_k^2}{c^3}\right) n_k \times h\nu_k$$

であり, よって基準振動 k の輻射の放出率は,

$$n_k + 1 = \frac{c^3 u(\nu_k)}{8\pi h\nu_k^3} + 1$$

に比例する. この第 1 項は誘導放出の寄与と解釈され, 第 2 項は自然放出の寄与と解釈される. このように, なんら熱力学の助けを借りずに, ディラックは誘導放出率 uB と自然放出率 A の比がアインシュタインの関係式 (1.2.21) で与えられると結論することができた. このようにディラックは, B に対する自身の以前の結果 (1.2.20) を用いて, 自然放出率 A に対するボルン・ヨルダンの公式[33] (1.2.19) を導くことができた. 少し後に, 同様の方法を用いて, ディラックは輻射の散乱と原子の励起状態の寿命を量子力学的に取扱い,[36] またヴィクトル・ワイスコップ (Victor Weisskopf) とユージン・ウィグナー (Eugene Wigner) はスペクトル線の形の詳細な研究を行った.[36a] ディラックは自分の論

文中で, 電磁ポテンシャルを輻射場 **A** と静的クーロンポテンシャル A^0 に分解していたが, それは古典電磁理論のローレンツ不変性とゲージ不変性を陽には保たない形で行われた. これらの事項はフェルミ[36b]によって少し後により強固に基礎づけられた. 1930 年代の多くの物理学者はフェルミの 1932 年の概説から量子電磁理論を学んだ.

p と q あるいは a と $a^\dagger$ の正準交換関係を用いることは量子化された理論のローレンツ不変性に関する疑問を引き起こした. ヨルダンとパウリ[37]は 1928 年に, 異なる時空点の場の交換子は実際ローレンツ不変であることを示すことができた. (この交換子は 5 章で計算する.) 少し後に, ボーアとレオン・ローゼンフェルト (Leon Rosenfeld)[38]はいくつかの巧妙な思考実験を使って, この交換関係は時間的間隔だけ離れた時空点の場の測定限界を表していることを示した.

電磁場の量子化が成功するとすぐに, これらの技法はそれ以外の場に適用された. 最初これは「第 2 量子化」と見なされた. つまり, 量子化される場は, 電子のディラック波動関数のような, 1 粒子の量子力学で使われる波動関数だった. この方向での第一歩は 1927 年にヨルダン[39]によって記されたようだ. 1928 年には本質的な要素がヨルダンとウィグナー[40]により提示された. 彼らは, パウリの排他原理により電子の任意の基準モード k の占有数 n_k は (位置座標だけでなくスピンも入れて) 0 または 1 以外の値をとれないことに気付いた. だから電子場は交換関係 (1.2.10) と (1.2.11) を満たす演算子の重ね合わせとしては展開できない. なぜならこれらの交換関係では, n_k が 0 から ∞ までの全ての整数をとることになってしまうからだ. そのかわりに彼らは, 電子場は**反交換関係** (anticommutation relation) ,

$$a_k\, a_j^\dagger + a_j^\dagger a_k = \delta_{jk}\ , \tag{1.2.22}$$

$$a_k\, a_j + a_j a_k = 0 \tag{1.2.23}$$

を満たす演算子 a_k と $a_k^\dagger$ の和で展開すべきだと提案した. その反交

換関係は, 各基準モードに一つずつ対応し各々 0 と 1 の値のみをとる整数 $n_1, n_2, \cdots$ の組を添字に持つ行列によって満たすことができる.

$$(a_k)_{n'_1, n'_2, \ldots, n_1, n_2, \ldots} = \begin{cases} 1 & n'_k = 0,\ n_k = 1,\ n'_j = n_j \text{ for } j \neq k \\ 0 & \text{その他の場合}, \end{cases} \tag{1.2.24}$$

$$(a_k^\dagger)_{n'_1, n'_2, \ldots, n_1, n_2, \ldots} = \begin{cases} 1 & n'_k = 1,\ n_k = 0,\ n'_j = n_j \text{ for } j \neq k \\ 0 & \text{その他の場合}. \end{cases} \tag{1.2.25}$$

例えば, この行列は一つの基準モードについては, n' と n の値が 0 と 1 に対応して 2 行 2 列であり, 行列 a と $a^\dagger$ は,

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad a^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

という形をしている. 読者には (1.2.24) と (1.2.25) が反交換関係 (1.2.22) と (1.2.23) を満たすことを確かめてもらいたい.

整数 $n_1, n_2, \ldots$ で指定される列ベクトルは, ボソンと同様に, 各基準モード k に n_k 個の量子が励起している状態を表すと解釈される. 違いは, もちろん, 各 n_k は 0 または 1 の値しかとらないので, パウリの排他原理どおり, 各基準モードにはせいぜい 1 個の量子しか存在できないことだ. a_k は, 基準モード k の量子がすでに 1 個存在すればそれを消滅させ, 存在しなければ 0 になる. また, $a_k^\dagger$ は, 基準モード k の量子が 1 個も存在しなければそれを生成するが, ただしすでに 1 個存在すれば 0 になる. ずっと後にフィルツ (Fierz) とパウリ[40a]によって, 交換関係と反交換関係の選択は粒子のスピンだけで決まっていることが示された. すなわち, 交換関係は光子のように整数スピンを持つ粒子に使われ, 反交換関係は電子のように半整数スピンを持つ粒子に使われねばならない. (このことは 5 章で違ったやり方で示す.)

一般の場の量子論は最初 1929 年にハイゼンベルグとパウリ[41]の二つの包括的な論文において展開された. 彼らの研究の出発点は正準形式を, 場に現れる基準モードの係数ではなくて, 場そのものに適用す

ることだった. ハイゼンベルグとパウリはラグランジアン L を場とその時空微分の局所的な関数の空間積分にとった. すると場の方程式は, 作用 $\int L\,dt$ が場の変分に対して極値をとるという原理から決定され, また交換関係は, 任意の場の時間微分に関するラグランジアンの汎関数微分がその場に共役な「運動量」のように振舞うとの仮定により決定される. (ただしフェルミオン場の場合には交換関係が反交換関係になる.) 彼らは更にこの一般的な形式を電磁場とディラック場に適用し, 電荷, 運動量, エネルギーの保存とローレンツおよびゲージ不変性を含む種々の不変性や保存則を研究した.

ハイゼンベルグ・パウリの形式はこの本の 7 章で述べる形式と本質的に同じなので, ここではこの節で後程役立つ例の一つに話を限ろう. 自由な複素スカラー場 $\phi(x)$ のラグランジアンを,

$$L = \int d^3x \left[\dot{\phi}^\dagger \dot{\phi} - c^2 (\nabla\phi)^\dagger \cdot (\nabla\phi) - \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2 \phi^\dagger \phi\right] \tag{1.2.26}$$

ととる. $\phi(x)$ に微小な変分 $\delta\phi(x)$ を施すと, ラグランジアンは,

$$\begin{aligned}\delta L = \int d^3x \Bigg[& \dot{\phi}^\dagger \delta\dot{\phi} + \dot{\phi}\delta\dot{\phi}^\dagger - c^2 \nabla\phi^\dagger \cdot \nabla\delta\phi - c^2 \nabla\phi \cdot \nabla\delta\phi^\dagger \\ & - \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2 \phi^\dagger \delta\phi - \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2 \phi\delta\phi^\dagger \Bigg]\end{aligned} \tag{1.2.27}$$

だけ変化する. 作用の停留条件を課す際に, 場の変分は時空の積分領域の境界でゼロになると仮定する. すると, 作用 $\int L\,dt$ の変化を計算する際, すぐに部分積分ができて

$$\delta \int L\,dt = c^2 \int d^4x \left[\delta\phi^\dagger \left(\Box - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\phi + \delta\phi \left(\Box - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\phi^\dagger\right]$$

と書くことができる. しかしこの表式は任意の $\delta\phi$ と $\delta\phi^\dagger$ に対してゼロでなければならず, したがって, ϕ はおなじみの相対論的波動方程式,

$$\left[\Box - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right]\phi = 0 \tag{1.2.28}$$

とその共役方程式を満たさなければならない．場 ϕ と $\phi^\dagger$ に正準共役な「運動量」は L を $\dot{\phi}$ と $\dot{\phi}^\dagger$ で汎関数微分することにより得られ，(1.2.27) から，

$$\pi \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = \dot{\phi}^\dagger \,, \tag{1.2.29}$$

$$\pi^\dagger \equiv \frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}^\dagger} = \dot{\phi} \tag{1.2.30}$$

となる．これらの場の変数は，クロネッカーのデルタをデルタ関数で置き換えた通常の正準交換関係を満たす．

$$\Big[\pi(\mathbf{x},t), \phi(\mathbf{y},t)\Big] = \Big[\pi^\dagger(\mathbf{x},t), \phi^\dagger(\mathbf{y},t)\Big] = -i\hbar\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{1.2.31}$$

$$\Big[\pi(\mathbf{x},t), \phi^\dagger(\mathbf{y},t)\Big] = \Big[\pi^\dagger(\mathbf{x},t), \phi(\mathbf{y},t)\Big] = 0, \tag{1.2.32}$$

$$\Big[\pi(\mathbf{x},t), \pi(\mathbf{y},t)\Big] = \Big[\pi^\dagger(\mathbf{x},t), \pi^\dagger(\mathbf{y},t)\Big] = \Big[\pi(\mathbf{x},t), \pi^\dagger(\mathbf{y},t)\Big] = 0, \tag{1.2.33}$$

$$\Big[\phi(\mathbf{x},t), \phi(\mathbf{y},t)\Big] = \Big[\phi^\dagger(\mathbf{x},t), \phi^\dagger(\mathbf{y},t)\Big] = \Big[\phi(\mathbf{x},t), \phi^\dagger(\mathbf{y},t)\Big] = 0. \tag{1.2.34}$$

この場合のハミルトニアンは (粒子の力学と全く同様に) 全ての正準運動量とそれに対応する場の時間微分の積の「和」からラグランジアンを引いたものだ．

$$H = \int d^3x \Big[\pi\dot{\phi} + \pi^\dagger\dot{\phi}^\dagger\Big] - L \,. \tag{1.2.35}$$

これは (1.2.26), (1.2.29) および (1.2.30) を用いて，

$$H = \int d^3x \left[\pi^\dagger\pi + c^2(\boldsymbol{\nabla}\phi)^\dagger\cdot(\boldsymbol{\nabla}\phi) + \left(\frac{m^2c^4}{\hbar^2}\right)\phi^\dagger\phi\right] \tag{1.2.36}$$

と書ける．

ハイゼンベルグ・パウリの論文の後，場の量子論が戦前の最終的な形に到達するまでにはあと一つの要素が欠けていた．それは負エネルギー状態の問題の解決だった．前節で見たとおり，ちょうどハイゼンベルグ・パウリの論文とほぼ同じ 1930 年にディラックは，電子の負エ

ネルギー状態は全て満たされていて, 負エネルギーの海にある空孔だけが観測可能であり, 負エネルギー電子自身は観測されないという考えを提唱した. 1932年にディラックの考えが陽電子の発見により確認されたと考えられるようになると, 彼の「空孔理論」を使って, 電子・陽電子の対生成や散乱を含むいくつかの過程が摂動論の最低次で計算された.

同時に, 多くの研究により, 明白なローレンツ不変性を持つ形式が発展した. 最も影響を及ぼしたのはディラック, ウラジミール・フォック (Vladimir Fock), ボリス・ポドルスキ (Boris Podolsky)[42]の「多時間」形式で, 状態ベクトルは, エネルギーの正負を問わず, 全電子の時空座標とスピン座標に依存する波動関数で表された. この形式では, 正エネルギーと負エネルギーを合わせた全電子数は保存する. 例えば, 電子・陽電子対の生成は負エネルギー電子の正エネルギー電子への励起として記述され, また電子・陽電子の対消滅はその逆の過程として記述される. この多時間形式は長所として明白なローレンツ不変性を持っていたが, しかしいくつかの欠点を持っていた. とりわけ, 量子化された電磁場として記述される光子の取扱いと電子および陽電子の取扱いは著しく異なっていた. 全ての物理学者がこの違いを欠点と感じていたわけではない. 電子の場は電磁場と異なり古典的極限をもたないので, その物理的重要性には疑いがもたれていた. また, ディラック[42a]は場というものを粒子を観測するための手段と考えていたので, 粒子と場が同じ形式で記述されるとは期待していなかった. その時点で頭を悩ませた人がいたかどうかは知らないが, 多時間形式にはもっと現実的な欠点があった. すなわち, それを使って原子核のベータ崩壊を記述することは困難だった. というのも, その反応では電子と反ニュートリノが陽電子やニュートリノをともなわずに生成されるからだ. フェルミ[43]がベータ崩壊における電子のエネルギー分布の計算に成功したことは, 場の理論の初期の成果の一つに数えられる.

ディラックの空孔理論が電子の場の量子論と同等であることは1933–4 年にフォック[43a]およびウェンデル・ファリィ(Wendell Furry) とオッペンハイマー[44]によって与えられた. この考えをより現代的な観点から理解するために, 電子場を電磁場やボルン・ハイゼンベルグ・ヨルダン場 (1.2.2) との類推で構成してみよう. 電子は電荷を持っているので, 消滅演算子と生成演算子が混ざらないようにしたい. そこで場を,

$$\psi(x) = \sum_k u_k(\mathbf{x}) e^{-i\omega_k t} a_k \tag{1.2.37}$$

と書いてみよう. ここで, $u_k(\mathbf{x})e^{-i\omega_k t}$ はディラック方程式 (1.1.13) の直交する平面波解の完全系である (k はここでは 3 次元運動量, スピン, エネルギーの符号を表す).

$$\mathcal{H} u_k = \hbar\omega_k u_k \ , \tag{1.2.38}$$

$$\mathcal{H} \equiv -i\hbar c\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\nabla} + \alpha_4 mc^2 \ , \tag{1.2.39}$$

$$\int u_k^\dagger u_\ell \, d^3x = \delta_{k\ell} \ . \tag{1.2.40}$$

また, a_k は対応する消滅演算子で, ヨルダン・ウィグナーの反交換関係 (1.2.22)–(1.2.23) を満たす. 「第 2 量子化」の考え方, すなわちハイゼンベルグ・パウリ[41]の正準量子化の手続きにしたがってハミルトニアンを作るには, 量子化された場 (1.2.37) で置き換えた「波動関数」を用いて $\mathcal{H}$ の「期待値」を以下のように計算する.

$$H = \int d^3x \, \psi^\dagger \mathcal{H} \psi = \sum_k \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k \ . \tag{1.2.41}$$

問題は, もちろん, これが正の演算子ではない点だ. すなわち, 演算子 $a_k^\dagger a_k$ は正の固有値 1 と 0 のみをとるが, ω_k の半分は負だ. ((1.2.24) と (1.2.25) を見よ.) この欠点を取り除くために, ファリィとオッペンハイマーは, 陽電子は負エネルギー電子の欠損だというディラックの考え[42]を採用した. 反交換関係は生成演算子と消滅演算子の間で対称

なので, 陽電子の生成演算子と消滅演算子はそれぞれ負エネルギー電子の対応する消滅演算子と生成演算子として定義された.

$$b_k^\dagger \equiv a_k \,, \qquad b_k \equiv a_k^\dagger \qquad (\text{for } \omega_k < 0) \,. \tag{1.2.42}$$

ここで, b の添字 k は正エネルギー陽電子のモードを表すが, その運動量とスピンは電子のモードが k のものと逆になっている. ディラック場 (1.2.37) は,

$$\psi(x) = \sum_k{}^{(+)} a_k u_k(x) + \sum_k{}^{(-)} b_k^\dagger u_k(x) \tag{1.2.43}$$

と書けるであろう. ここで $(+)$ と $(-)$ はそれぞれ $\omega_k > 0$ と $\omega_k < 0$ の基準モード k についての和で, $u_k(x) \equiv u_k(\mathbf{x})e^{-i\omega_k t}$ だ. 同様に, b の反交換関係を用いて, エネルギー演算子 (1.2.41) を,

$$H = \sum_k{}^{(+)} \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k + \sum_k{}^{(-)} \hbar|\omega_k| b_k^\dagger b_k + E_0 \tag{1.2.44}$$

と書換えることができる. ここで E_0 は無限大の c 数,

$$E_0 = -\sum_k{}^{(-)} \hbar|\omega_k| \tag{1.2.45}$$

だ. この再定義を単なる形式以上のものにするには, 物理的真空を, 正エネルギー電子も正エネルギー陽電子も含まない状態 Ψ_0 すなわち,

$$a_k\Psi_0 = 0 \qquad (\omega_k > 0) \,, \tag{1.2.46}$$

$$b_k\Psi_0 = 0 \qquad (\omega_k < 0) \tag{1.2.47}$$

とする必要がある. すると (1.2.44) より真空のエネルギーはちょうど E_0 になる. 全てのエネルギーを真空のエネルギーとの比較で測定するなら, 物理的なエネルギー演算子は $H - E_0$ であり, (1.2.44) よりわかるようにこれは正の演算子だ.

電荷をもったスピンゼロ粒子の負エネルギー状態の問題も 1934 年に パウリとワイスコップ[45]により解決したが, 彼らの論文には, 負エネルギー状態が満たされているというディラックの描像に挑戦する目的も含まれていた. この場合は生成・消滅演算子が反交換関係ではなくて交換関係を満たすので, フェルミオンの場合のようにこれらの演算子の役割を自由に入れ替えることはできない. その代わりに, ハイゼンベルグ・パウリの正準形式[41]に戻って色々な基準モードの係数のうちどれが生成あるいは消滅演算子であるかを決めなければならない.

パウリとワイスコップは自由な荷電スカラー場を空間体積 $V \equiv L^3$ の立方体内の平面波で,

$$\phi(\mathbf{x},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} q(\mathbf{k},t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tag{1.2.48}$$

と展開した. ここで, 波数は周期境界条件より $k_j L/2\pi$ が $j = 1,2,3$ について三つの正または負の整数の組に制限される. 同様に正準共役量 (1.2.29) は,

$$\pi(\mathbf{x},t) \equiv \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} p(\mathbf{k},t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tag{1.2.49}$$

と展開された. ここで指数にマイナス符号がついているのは (1.2.29) が今度は,

$$p(\mathbf{k},t) = \dot{q}^\dagger(\mathbf{k},t) \tag{1.2.50}$$

となるようにするためだ. フーリエの反転公式より,

$$q(\mathbf{k},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d^3x\ \phi(\mathbf{x},t) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\,, \tag{1.2.51}$$

$$p(\mathbf{k},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d^3x\ \pi(\mathbf{x},t) e^{+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tag{1.2.52}$$

が得られ, よって正準交換関係 (1.2.31)–(1.2.34) より p と q に対して,

$$\Big[p(\mathbf{k},t), q(\mathbf{l},t)\Big] = \frac{-i\hbar}{V} \int d^3x\ e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e^{-i\mathbf{l}\cdot\mathbf{x}} = -i\hbar\delta_{\mathbf{kl}}\,, \tag{1.2.53}$$

$$\left[p(\mathbf{k},t), q^\dagger(\mathbf{l},t)\right] = \left[p(\mathbf{k},t), p(\mathbf{l},t)\right] = \left[p(\mathbf{k},t), p^\dagger(\mathbf{l},t)\right]$$
$$= \left[q(\mathbf{k},t), q(\mathbf{l},t)\right] = \left[q(\mathbf{k},t), q^\dagger(\mathbf{l},t)\right] = 0 \quad (1.2.54)$$

および, それらのエルミート共役をとることにより導かれる別の関係式が得られる. (1.2.48) と (1.2.49) をハミルトニアンの式 (1.2.36) に代入することにより, その演算子を p と q を用いて,

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \left[p^\dagger(\mathbf{k},t)p(\mathbf{k},t) \ + \ \omega_{\mathbf{k}}^2\, q^\dagger(\mathbf{k},t)q(\mathbf{k},t)\right] \quad (1.2.55)$$

と表すことができる. ここで,

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 \equiv c^2\mathbf{k}^2 + \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2 \quad (1.2.56)$$

である. p の時間微分はハミルトニアン方程式,

$$\dot{p}(\mathbf{k},t) = -\frac{\partial H}{\partial q(\mathbf{k},t)} = -\omega_{\mathbf{k}}^2\, q^\dagger(\mathbf{k},t) \quad (1.2.57)$$

(およびその共役方程式) で与えられ, それは (1.2.50) に照らせばちょうどクライン・ゴルドン・シュレーディンガーの波動方程式 (1.2.28) と同等な結果だ.

1926 年のボルン・ハイゼンベルグ・ヨルダン[4]の模型の場合と同様に, 自由場は無限個の連成した調和振動子のように振舞うことがわかる. パウリとワイスコップは, 粒子と反粒子に対応して異なる 2 種類の消滅および生成演算子 a, b, $a^\dagger$, $b^\dagger$ を導入して, 交換関係 (1.2.53)–(1.2.54) および「運動方程式」 (1.2.50) と (1.2.57) を満たす p と q の演算子を構成することができた,

$$q(\mathbf{k},t) = i\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}}\left[a(\mathbf{k})\exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t) - b^\dagger(\mathbf{k})\, \exp(i\omega_{\mathbf{k}}t)\right], \quad (1.2.58)$$

$$p(\mathbf{k},t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2}}\left[b(\mathbf{k})\exp(-i\omega_{\mathbf{k}}t) \ + \ a^\dagger(\mathbf{k})\, \exp(+i\omega_{\mathbf{k}}t)\right] \quad (1.2.59)$$

ここで,

$$\left[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{l})\right] = \left[b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{l})\right] = \delta_{\mathbf{kl}} \,, \tag{1.2.60}$$

$$\left[a(\mathbf{k}), a(\mathbf{l})\right] = \left[b(\mathbf{k}), b(\mathbf{l})\right] = 0 \,, \tag{1.2.61}$$

$$\begin{aligned}\left[a(\mathbf{k}), b(\mathbf{l})\right] &= \left[a(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{l})\right] = \left[a^\dagger(\mathbf{k}), b(\mathbf{l})\right] \\ &= \left[a^\dagger(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{l})\right] = 0 \end{aligned} \tag{1.2.62}$$

である. これらの演算子が望みどおり, 関係 (1.2.53), (1.2.54), (1.2.50) および (1.2.57) を満たしていることを確かめるのは簡単だ. 場 (1.2.48) は,

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_{\mathbf{k}}}} \, \big[a(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - i\omega_{\mathbf{k}} t) \\ - b^\dagger(-\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} + i\omega_{\mathbf{k}} t)\big]\end{aligned} \tag{1.2.63}$$

と書け, またハミルトニアン (1.2.55) は,

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2}\,\hbar\omega_{\mathbf{k}} \left[b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k}) + b(\mathbf{k})b^\dagger(\mathbf{k}) + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + a(\mathbf{k})a^\dagger(\mathbf{k})\right]$$

という形をとり, (1.2.60)–(1.2.62) を使えば,

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left[b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k}) + a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})\right] + E_0 \tag{1.2.64}$$

となる. ここで, E_0 は無限大の c 数,

$$E_0 \equiv \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \tag{1.2.65}$$

だ. 2 種類の異なる演算子 a と b が存在し, それらがハミルトニアンの中に正確に同じ形で現れるということから, これは同じ質量をもった 2 種類の粒子の理論であることがわかる. パウリとワイスコップに

より強調されたように, この 2 種類は粒子とその反粒子と見なすことができ, 更に荷電粒子ならば逆の電荷を持つ. 上で強調したように, スピンゼロのボソンはスピン 1/2 のフェルミオンと同様に別個の反粒子を持つことができ, それはボソンの場合には負エネルギー粒子の海の空孔と見なすことができない.

a と b, または $a^\dagger$ と $b^\dagger$ のうちどちらが消滅演算子なのかは, 交換関係の真空状態 Ψ_0 での期待値をとればわかる. 例えば, もし $a^\dagger_{\mathbf{k}}$ が消滅演算子ならば, 真空にかかるとゼロになるので, (1.2.60) の真空期待値は,

$$-||a(\mathbf{k})\Psi_0||^2 = \left(\Psi_0, \left[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k})\right]\Psi_0\right) = +1 \tag{1.2.66}$$

となり, 左辺は負でなければならないという要請と矛盾する. このようにして a_k と b_k が消滅演算子であり, よって,

$$a(\mathbf{k})\Psi_0 = b(\mathbf{k})\Psi_0 = 0 \tag{1.2.67}$$

と結論される. これはどの交換関係とも矛盾しない. このように, 正準形式のおかげで場 (1.2.58) の $e^{+i\omega t}$ の係数は生成演算子だとの結論に導かれ, これはスピン 1/2 の場合のファリィ・オッペンハイマー形式[44]の結論と同じだ.

(1.2.64) と (1.2.67) より E_0 は真空状態のエネルギーであることがわかる. 全てのエネルギーを E_0 に相対的に測定することにすれば, 物理的なエネルギー演算子は $H - E_0$ であり, (1.2.64) はこの演算子がここでも正であることを示している.

ディラックの出発点の役割を果たした問題, すなわち負確率の問題についてはどうだろう. ディラックが認識していたように, クライン・ゴルドン・シュレーディンガーが見付けた自由スカラー場の波動方程式 (1.2.28) の解から作ることができ, かつ (1.1.10) の形の保存則を満

たす唯一の確率密度 ρ は,

$$\rho = 2\,\mathrm{Im}\left[\phi^\dagger \frac{\partial\phi}{\partial t}\right] \tag{1.2.68}$$

に比例せねばならず, よって必ずしも正の量ではない. 同様に,「第 2 量子化」された理論では ϕ は (1.2.63) で与えられるので, ρ は正の演算子ではない. いまの場合 $\phi^\dagger(x)$ は $\dot\phi(x)$ と交換しないので, (1.2.68) は様々な形に書くことができ, それらは無限大の c 数だけの差がある. そこで, それを,

$$\rho = \frac{i}{\hbar}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}\phi^\dagger - \frac{\partial\phi^\dagger}{\partial t}\phi\right] \tag{1.2.69}$$

と書くことにするのが便利だ. この演算子の空間積分は簡単に計算できて,

$$N \equiv \int \rho\, d^3x = \sum_{\mathbf{k}}\Big(a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) - b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})\Big) \tag{1.2.70}$$

となり, 明らかにどちらの符号の固有値も持つ.

しかしある意味で, この問題はスピンゼロだけでなくスピン 1/2 の場の量子論にも現れる. ディラックの密度演算子 $\psi^\dagger\psi$ は確かに正の演算子だが, 物理的な密度を構成するためには満たされた電子状態からの寄与を引いておかなければならない. 平面波分解 (1.2.43) を使えば, 全粒子数演算子は,

$$N \equiv \int d^3x\; \psi^\dagger\psi = \sum_{\mathbf{k}}{}^{(+)} a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}}{}^{(-)} b(\mathbf{k})b^\dagger(\mathbf{k})$$

となる. b の反交換関係よりこれは,

$$N - N_0 = \sum_{\mathbf{k}}{}^{(+)} a^\dagger_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}} - \sum_{\mathbf{k}}{}^{(-)} b^\dagger_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}} \tag{1.2.71}$$

と書換えることができる. ここで N_0 は無限大の定数,

$$N_0 = \sum_{\mathbf{k}}{}^{(-)} 1 \tag{1.2.72}$$

だ. (1.2.46) と (1.2.47) によれば, N_0 は真空中の粒子数なので, ファリィとオッペンハイマーが論じたところによれば, 物理的な粒子数演算子は $N - N_0$ であり, スピンゼロの場合と同様に, この場合も正負両方の固有値を持つ.

場の量子論によるこの問題の解答は, ファリィ・オッペンハイマーの ψ もパウリ・ワイスコップの ϕ も確率振幅ではなく, 保存する正の確率密度を定義する必要もないということだ. そうではなく, 物理的ヒルベルト空間は各モードの粒子と (または) 反粒子を一定数だけ含む状態で張られている. もし Φ_n がそのような状態の完全正規直交系ならば, 任意の状態 Ψ について粒子数を測定すると, その系が状態 Φ_n にあることを見出す確率が与えられる. その確率は, (Φ_n, Ψ) を通常のヒルベルト空間のスカラー積として,

$$P_n = |(\Phi_n, \Psi)|^2 \tag{1.2.73}$$

だ. よって, 確率が負になる可能性の問題はどのようなスピンの場合にも生じない. 波動場 ϕ, ψ 等は決して確率振幅ではなく, 種々の基準モードの粒子を生成したり消滅させる演算子だ. この意味で,「第 2 量子化」という誤解を与えやすい表現は永久に引退させるのが良い.

とりわけ, (1.2.70) と (1.2.71) の演算子 N と $N - N_0$ は全確率と解釈すべきではなく, 粒子数演算子, もっと詳しくいえば, 粒子数と反粒子数の差と解釈すべきだ. 荷電粒子の場合には, 電荷が保存するために電荷の演算子がこれらの粒子数演算子に比例し, よって (1.2.70) と (1.2.71) の負符号からただちに粒子と反粒子は逆電荷を持つことが結論できる. この場の理論的形式では, 相互作用は場の変数に関して 3 次, 4 次, あるいは更に高次の項をハミルトニアンに付与し, 種々の過程が起こる率はこれらの相互作用演算子を時間に依存する摂動論の中で用いて得られる. これらの概念的枠組みがこの本における多くの仕事の基礎となる.

場の量子論にはこのように明らかな利点があるにもかかわらず, それがただちに空孔理論に取って代わったわけではない. むしろしばらくは二つの観点が共存し, 場の理論的考え方と空孔理論的考え方の様々な組み合わせが物理的反応率の計算に使われた. この時期には断面積のいくつかの計算が種々の過程について e^2 の最低次でなされた. その中には1929 年のクラインと仁科[46]による $e^- + \gamma \to e^- + \gamma$, 1930 年のディラック[47]による $e^+ + e^- \to 2\gamma$, 1932 年のメラー(Møller)[48]による $e^- + e^- \to e^- + e^-$, 1934 年のベーテとハイトラー(Heitler)[49]による $e^- + Z \to e^- + \gamma + Z$ と $\gamma + Z \to e^+ + e^- + Z$ (ここで Z は重い原子のクーロン場を表す), 1936 年のバーバー(Bhabha)[50]による $e^+ + e^- \to e^+ + e^-$ 等が含まれる. (8 章でそのような過程の計算規則を示し, 電子・光子散乱について詳述する.) これら最低次の計算は有限の結果を出し, 実験データとかなり一致していた.

それでも, 場の量子論に不満を持つ一般的な雰囲気が (空孔理論の形か否かを問わず)1930 年代を通して続いた. その理由の一つは, オッペンハイマーとフランクリン・カールソン(Franklin Carlson)[50a]が 1936 年に指摘したように, 量子電磁理論が宇宙線シャワー中の荷電粒子の貫通力を説明することに明らかに失敗したことだ. 不満の別の原因は, 第 1 の原因と関連することがわかるが, 新種の粒子や相互作用が次々と発見されたことだ. すでに電子, 光子, ニュートリノ, 更にもちろん水素原子核すなわち陽子のことは述べた. 1920 年代を通じて重い原子核は陽子と電子でできていると一般に信じられていたが, 電子のような軽い粒子が如何にして原子核内に閉じこめられているのかは理解し難かった. この描像の別の深刻な困難が, エーレンフェストとオッペンハイマー[51]により 1931 年に指摘された. 通常の窒素 N^{14} の原子核が原子番号 7 と原子量 14 を持つためには 14 個の陽子と 7 個の電子で構成されていなければならず, よってフェルミオンであるはずだが, それは N^{14} がボソンだとの分子分光学[52]の結果と矛盾したのだ. この

問題 (とその他の問題) は 1932 年に, 中性子の発見[53]を受けてハイゼンベルグ[54]が, 原子核は陽子と電子ではなく陽子と中性子でできていると提唱して解決した. 原子核が分解しないように保つには, 明らかに中性子と陽子の間に電磁力ではない近距離の強い力が働いているはずだった.

フェルミのベータ崩壊の理論の成功の後, 何人かの研究者が[54a], この理論で電子とニュートリノの交換により核力を説明できるかもしれないと推察した. 数年後の 1935 年に, 湯川秀樹は全く異なる核力の場の量子論[55]を提唱した. 本質的には古典的な計算から, 彼はスカラー場と核子 (陽子または中性子) の相互作用が核子・核子ポテンシャルを生じ, その核子間距離 r への依存性は電場により生じる $1/r$ のクーロンポテンシャルではなく,

$$V(r) \propto \frac{1}{r} \exp(-\lambda r) \tag{1.2.74}$$

となることを発見した. 湯川のスカラー場の方程式には λ という量がパラメータとして導入され, この方程式を量子化した際に, 湯川はこの方程式が質量 $\hbar\lambda/c$ の粒子を記述することを見出した. 核内で観測された強い相互作用の到達距離から, 湯川は $\hbar\lambda/c$ が電子質量の約 200 倍だと推定した. 1937 年にそのような「中間子」(meson) がセス・ネッダーマイアー (Seth Neddermeyer) とアンダーソンの二人およびヤベツ・キュリ・ストリート (Jabez Curry Street) とエドワード・カール・スティーブンソン (Edward Carl Stevenson) の二人による霧箱実験[56]で発見され, これらの粒子は湯川が仮定した粒子だと広く信じられた.

中間子の発見により宇宙線中の荷電粒子が全て電子ではないということが明らかになり, オッペンハイマーとカールソンを悩ませた宇宙線シャワーの問題は解決した. しかし同時に, それは新しい困難を生み出した. ロタール・ノルトハイム (Lothar Nordheim)[56a]が 1939 年

に指摘したところでは, 中間子は強い相互作用により上空で大量に生成される (そしてそれは湯川理論から要求されることだ) が, その同じ強い相互作用により大気中で中間子の吸収が引き起こされ, 低空で中間子が多量に観測される事実と矛盾した結果を導く. 1947 年のマルセロ・コンベルシ (Marcello Conversi), エトーレ・パンシニ (Ettore Pancini), オレステ・ピシオニ (Oreste Piccioni)[57]の実験では, 低空での宇宙線の主要な成分となっている中間子は実際には核子と弱くしか相互作用しておらず, したがって湯川粒子と見なすことはできないことが示された. この謎は坂田昌一と井上健およびマルシャックの理論的な提案[58]とそれに引き続くセサレ・ラテス (Cesare Lattes), オチアリニ, セシル・パウエル (Cecil Powell) によるそれの実験的確認[59]により解決した. すなわち, 少しだけ質量の異なる 2 種類の中間子が存在し, 重い方 (今日では π 中間子またはパイオン (pion) と呼ばれている) は強い相互作用を持ち湯川により予想された核力を担っている. また軽い方 (今日では μ 中間子またはミューオン (muon) と呼ばれているが) は弱い相互作用と電磁相互作用のみを持ち, 地表面での宇宙線の主要な成分であり, π 中間子の崩壊により生成される. 同じ 1947 年に, (今日では K 中間子とハイペロン (hyperon) として知られている) 全く新しい種類の粒子がジョージ・ロチェスター (George Rochester) とクリフォード・バトラー (Clifford Butler)[60]により宇宙線中で発見された. 1947 年から現在まで驚くほど多様な粒子が発見され続けてきたが, この話を続けるとここでの概観の範囲を超える. これらの発見により, 光子, 電子および陽電子に限定したいかなる概念的枠組もあまりに狭すぎて, 基礎理論として真剣に捉えることはできないことが明白に示された. しかしはるかに重大な障害となったのは純粋に理論的な問題, すなわち無限大の問題だった.

1.3　無限大の問題

場の量子論は, 時空点 x で粒子を消滅させたり生成したりする場 $\psi(x)$ を取り扱う. それ以前の古典電子論の経験によれば, 点電子は無限大の電磁的自己質量を持つ. つまり電磁的自己質量は半径 a の表面電荷分布の場合に $e^2/6\pi ac^2$ なので, $a \to 0$ をとると発散する. 期待に反して, この問題は初期の場の量子論においてはるかに深刻な形で登場した. その後の理論の発展によりずいぶん改善されたが, 今日でもその問題は残っている.

場の量子論における無限大の問題は, 1929–30 年のハイゼンベルグとパウリ[41]の論文で指摘されたのが最初のようだ. すぐ後に, オッペンハイマー[61]が束縛電子の, またイヴァル・ウォラー (Ivar Waller)[62]が自由電子の電磁的自己エネルギーを計算して無限大の存在を確かめた. 彼らは, 通常の 2 次の摂動論を用いたが, そこでは電子と光子から成る中間状態が登場する. 例えば, 水素原子の n 番目のエネルギー準位にある電子のエネルギー E_n のずれは,

$$\Delta E_n = \sum_{m,\lambda} \int d^3k \, \frac{|< m; \mathbf{k}, \lambda | H' | n >|^2}{E_n - E_m - |\mathbf{k}|c} \tag{1.3.1}$$

で与えられる. ここで, 和と積分は全ての中間電子状態 m, 光子のヘリシティ(helicity) λ, 光子の運動量 $\mathbf{k}$ についてとり, H' はハミルトニアン中の輻射と電子の相互作用を表す項だ. この計算は形式的に無限大の自己エネルギーを与えた. しかも, $1/a$ より大きな波数を持つ光子の状態を全て無視すればこの無限大は取り除かれるが, $a \to 0$ としたとき自己エネルギーは $1/a^2$ のように振舞う. この種の無限大はしばしば紫外発散と呼ばれるが, それは非常に短波長の粒子を含む中間状態から無限大が生じるからだ.

これらの計算では, 電子はもともとのディラック理論の規則に基づいて取り扱われ, 満たされた負エネルギー電子状態の考え方は用いら

れなかった. 数年後ワイスコップは, 全負エネルギー状態が満たされている新しい空孔理論で電子の自己質量を計算し直した. この場合2次の摂動論の範囲で別の項が現れる. 非空孔理論の言葉で記述するとそれは, まず終状態の電子が光子および陽電子とともに真空から現れ, 次にこの光子と陽電子が始状態の電子とともに消滅する過程から生じる. 当初, ワイスコップは光子の波数の切断 $1/a$ に対し $1/a^2$ の依存性があることを見出した. 同じ計算は当時(ボーアの示唆で) カールソンとファリィにより遂行されていた. ワイスコップの結果を見てファリィが気付いたことは, ワイスコップは自分とカールソンが落とした静電項を取り入れているが, ワイスコップは磁気的自己エネルギーの計算で別の間違いをしていることだった. ファリィからこのことを聞いて自分の誤りを訂正したワイスコップは, 質量のずれのうち $1/a^2$ の項が全体では相殺することを見付けた. しかし, この相殺にもかかわらず, 無限大は消えず, 波数の切断 $1/a$ に対し自己質量は,

$$m_{em} = \frac{3\alpha}{2\pi}\, m \,\ln\left(\frac{\hbar}{mca}\right) \tag{1.3.2}$$

となることがわかった.[63] 切断依存性が, 古典論の $1/a$ や以前の量子論の $1/a^2$ と比べて, $\ln a$ に緩和されたことは, 当時は軽く勇気づける程度だったが, 後のくりこみ理論の発展においては極めて重要となった.

全く異なる種類の無限大を見出したのは1933年のディラック[64]が最初のようだ. 彼は, ほとんど一様な静的外部電荷密度 $\varepsilon(\mathbf{x})$ が真空に与える効果を考察した. この真空とは空孔理論の負エネルギー準位が電子で満たされている状態だ. $\varepsilon(\mathbf{x})$ と負エネルギー電子の電荷分布のクーロン相互作用は「真空偏極」を引き起こし, 電荷密度,

$$\delta\varepsilon = A\varepsilon + B\left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \nabla^2\varepsilon + \cdots \tag{1.3.3}$$

を誘起する. 定数 B は有限で α の大きさだ. 他方 A は, $1/a$ を波数の切断として, $\alpha \ln a$ で対数的に発散する.

無限大は光子同士の散乱という関連した問題においても起こるように思われた. ハンス・オイラー (Hans Euler), バーナード・コッケル (Bernard Kockel), ハイゼンベルグ[65]が 1935–6 年に示したように, これらの無限大は以前にディラック[66]とハイゼンベルグ[67]が示唆した幾分とも任意性のある処方を用いて取り除くことができた. 彼らは仮想的な電子・陽電子対により生み出される非線形の電磁力学的効果を表す有効ラグランジアン密度を計算し,

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\Big(\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2\Big)+\frac{e^4\hbar}{360\pi^2 m_e^4 c^7}\Big[\Big(\mathbf{E}^2-\mathbf{B}^2\Big)^2+7\Big(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}\Big)^2\Big]+\cdots \tag{1.3.4}$$

という結果を得た. これは振動数が $\nu \ll m_e c^2/h$ の場合に正しい. すぐ後にニコラス・ケマー (Nicholas Kemmer) とワイスコップ[68]が示した議論によると, この場合の無限大は見かけ上のもので, (1.3.4) は引き算の処方なしで導出できる.

無限大との苦闘における一つの光明は, 赤外発散の扱いに成功したことだ. その発散は積分領域の高エネルギー側からではなくてむしろ低エネルギー側から来ている. 1937 年にフェリックス・ブロッホ (Felix Bloch) とアーネ・ノルトジーク (Arne Nordsieck)[68a]が示したように, 任意個の光子が生成される過程を含めれば赤外発散は相殺する. このことは 13 章で現代的な言葉を使って議論する.

1939 年のシドニー・ミッシェル・ダンコフ (Sidney Michael Dancoff)[69]が行った原子の静的クーロン場による電子散乱の輻射補正の計算で, 更に別の無限大が登場した. その計算には誤りがあった (項が一つ抜けていた) が, それは後になるまでわからなかった.[69a]

1930 年代を通じて, これら種々の無限大は単に特定の計算だけがうまくいかないと見なされていたわけではない. むしろ, それらは相対論的場の量子論の理解に最も根本的なところで欠けているものがあることを表しているように思われた. この意見は前節で述べた宇宙線の問題により増幅された.

この悲観論に動揺して, 1930 年代から 1940 年代を通して別な形式の探求が継続的に行われた. シュウィンガー[69b] が後に回想したところによると, 「関連分野の物理学者の大部分の心を占めていたのは, 結合した電子と電磁場の既存の相対論的理論を解析し注意深く適用することではなく, それを変更することだった.」かくして, 1938 年にハイゼンベルグ[70] は, 基本的な作用 h や基本的な速度 c に類似した基本的な長さ L の存在を提唱した. 場の理論は L よりも長い距離に対してだけ成り立ち, 全ての発散積分は距離 L あるいは運動量 h/L で事実上切断されていると考えられた. 場の理論に非局所的な構造を付与するいくつかの特殊な提案[70a] がなされた. 一部の理論家は, 状態ベクトルと量子場の形式は観測可能量のみに基づく形式に取って替わられるべきだと考え始めた. その例としては, ホィーラー[71] が 1937 年に, またハイゼンベルグ[72] が 1943 年に導入した S 行列が挙げられるが, その理論は種々の散乱過程の振幅で構成されている. 後で見るように, S 行列の概念は今では現代的な場の量子論の重要な一部になっているが, 純粋な S 行列理論は, 特に強い相互作用の問題の可能な解決策として, 理想的だと考えた理論家もいる.[73] 更に別の方向として, ホィーラーとリチャード・ファインマン (Richard Feynman)[74] は 1945 年に電磁場を取り除いて電磁相互作用を遠隔相互作用から導くことを試みた. 彼らは, 電荷の源と試験電荷の相互作用だけでなくこれらの電荷と宇宙の他の全ての電荷との相互作用も考慮すれば, 純粋な遅延ポテンシャル (または純粋な先進ポテンシャル) を得ることができることを示した. 多分この時期に提唱された量子力学の変更の中で最も過激なものは, ディラック[75] により導入された負の確率を持った状態だが, 状態和をとる際に無限大を相殺する手段として導入された. ヒルベルト空間における「不定計量」というこの考えもまた, もともと提案された形とは異なるが, 場の量子論において活躍している.

無限大に対するもっと保守的な考え方も 1930 年代に拡がっていた. それは, 多分これらの無限大は全て理論のパラメータの再定義, すなわち「くりこみ」によって吸収できるだろうという考え方だ. 例えば, すでに知られていたとおりローレンツ不変な古典理論では, 電子の電磁的自己エネルギーと自己運動量は電子の質量に対する補正の形をとらなければならない. よって, これらの量に現れる無限大は電子の非電磁的「裸の」質量の負の無限大と相殺し, 有限の測定可能な「繰り込まれた」質量が残るようにできる. また, (1.3.3) よりわかるように, 真空偏極は電子の電荷を $e \equiv \int d^3x\, \varepsilon$ から,

$$e_{\text{TOTAL}} = \int d^3x(\varepsilon + \delta\varepsilon) = (1 + A)e \tag{1.3.5}$$

に変える. 真空偏極は, 散乱断面積が e ではなく e_{TOTAL} で表されるなら, 最低次では有限の結果を与える. 問題は, 場の量子論の全ての無限大がこのように扱えるのかどうかだった. 1936 年にワイスコップはこれが正しいことを示唆し, 既知の無限大は, 種々の例の計算において物理的パラメータのくりこみによって取り除けることを証明した. しかし, 当時知られていた計算技術では, 無限大が常に取り除けることを示すのは不可能だった. また, ダンコフの計算[69]からは, そのことは不可能なように思われた.

無限大の出現による別の問題として, どのような効果も, 場の量子論において無限大になれば, 実際には全く存在しないと信じる傾向が生じたことだ. 特に, 1928 年のディラック理論は水素原子の $2s_{1/2}$–$2p_{1/2}$ 準位が α の全次数で完全に縮退することを予言していたが, この二つの準位の分裂を量子電磁気学でどう計算しても束縛電子の無限大の自己エネルギーの問題に出くわした. そのため, そのような分裂は一般には真剣に受けとめられなかった. 後にベーテ[80]は, 「この準位のずれは既存の全ての理論において無限大となったので, いつも無視されていた.」と述べている. 1930 年代末の分光学実験[77]で 1000 MHz 程

度の $2s_{1/2}$–$2p_{1/2}$ の分裂の存在が指摘され始めていたが, その時点においてさえこのような傾向は続いていた. 注目すべき例外はエドウィン・アルブレヒト・ウェーリング (Edwin Albrecht Uehling)[78]であった. 彼はすでに述べた真空偏極の効果が $2s_{1/2}$–$2p_{1/2}$ の分裂を引き起こすことに気付いていた. 残念ながら, 14 章で見るようにこれによる分裂は 1000 MHz よりずっと小さく, また符号も正しくなかった.

場の量子論を覆っていた暗闇は第 2 次世界大戦後すぐに晴れ始めた. 1947 年 6 月 1 – 4 日に, ニューヨークのシェルター島 (Shelter Island) で開催された量子力学の基礎に関する会議には, 1930 年代から場の量子論の問題に携わってきた理論物理学者と大戦中に研究を始めた若い世代の理論家, そして決定的に重要なことだが, 数人の実験物理学者が集まった. 議論を先導したのは, ハンス・クラマース (Hans Kramers), オッペンハイマー, ワイスコップだった. 実験家の一人 (というより実験家に転じた理論家) のウィリス・ラム (Willis Lamb)[79]は水素原子の $2s_{1/2}$–$2p_{1/2}$ の準位のずれの決定的な測定について述べた. 炉から出た, 多くは $2s$ と $2p$ 状態にある水素原子線が, 励起状態の原子にだけ反応する検出器に向けて打ち込まれた. $2p$ 状態にある原子は光子 (ライマン α) を 1 個放出して $1s$ 基底状態に極めて短時間で崩壊できるが, $2s$ 状態は 2 光子放出により極めてゆっくりとしか崩壊できない. 結果として検出器は準安定な $2s$ 状態の原子数を測定していることになる. 原子線が磁場中を通過すると, $2s_{1/2}$–$2p_{1/2}$ に自然に存在する任意の分裂に既存のゼーマン分裂が付加される. 原子線は更に $\nu \sim 10$ GHz という固定したマイクロ波周波数の電磁場にさらされた. 特定の磁場強度のとき検出器の信号が急減するのが観測された. それはマイクロ波が準安定な $2s$ 状態から $2p$ 状態に共鳴遷移を引き起こし, その後直ちにライマン α を放出して基底状態への遷移が起こったことを示している. 磁場強度をこの値にしたときの $2s$–$2p$ 分裂の (ゼーマンともともとのを合わせた) 全体の大きさはちょうど $h\nu$ のはずであり,

その値からもともとの分裂の大きさが推定できる. 予備的な値として 1000 MHz が報告され, それは以前の分光学の測定[77]と一致していた. この発見の衝撃は 1954 年に私がコペンハーゲンで大学院生だったときに流行った「あるものが無限大だからといってそれだけではゼロということにはならない」という言い回しに集約できる.

ラム・シフトの発見はシェルター島に集まった理論家の間に強い関心を呼び起こした. 彼らの多くはすでに量子電磁理論の計算法の改良に努めていた. クラマースは古典電磁理論における拡がった電子の質量のくりこみに関する自分の研究を報告し,[79a] 理論の質量パラメータを実験的な電子質量と見なすように理論を表現し直せば, 半径ゼロの極限での自己エネルギーの発散にともなう困難は現れないことを示した. シュウィンガーとワイスコップは (すでにラムの結果をうわさで聞いていてシェルター島への旅の途中で議論していたが), 陽電子を含む中間状態を取り入れるとエネルギー準位のずれの発散が $1/a^2$ から $\ln a$ に弱まることは知られているので, これらの中間状態を考慮すれば原子のエネルギー準位のずれの差は多分有限であろうと示唆した. (実際, ワイスコップはラムの実験を知る以前の 1946 年に, この問題を大学院生のブルース・フレンチ (Bruce French) に与えていた.) その会議のほぼ直後のシェネクタディ(Schenectady) への汽車の中でハンス・ベーテ (Hans Bethe)[80]は, 陽電子を含む中間状態の効果は取り入れず, かわりに無限大を取り除くために仮想光子の運動量に $m_e c^2$ 程度の単純な切断を使って, 非相対論的計算を実行した. 彼は 1040 MHz という近似値を得て勇気づけられた. その後すぐに別の幾人かの人達[81]によって, くりこみの考え方を用いて無限大を取り除く完全に相対論的な計算が実行され, 実験と素晴らしく良い一致を示した.

別の感動的な実験結果がシェルター島でイシドル・ラビ (Isidor I. Rabi) により報告された. 彼の実験室で行われた水素と重水素の超微細構造の測定によると,[82] 電子の磁気モーメントはディラックの値

$e\hbar/2mc$ の約 1.0013 倍であることが示され, 引き続く測定によりナトリウムとガリウムの磁気回転比 (gyromagnetic ratio) として,

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc}[1.00118 \pm 0.00003] \tag{1.3.6}$$

という精密な値が得られた.[83] これらの結果を知って, グレゴリ・ブライト (Gregory Breit)[83a]はその原因は電子の磁気モーメントへの次数 α の輻射補正だと提案した. シェルター島でブライトとシュウィンガーは自分たちがこの補正を計算中であることを報告した. 会議の少し後シュウィンガーは, 電子の異常磁気モーメントの計算を成功裏にやり遂げ,

$$\mu = \frac{e\hbar}{2mc}\left[1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right] = \frac{e\hbar}{2mc}[1.001162] \tag{1.3.7}$$

という値を得た.[84] これは観測と素晴らしく一致していた. この計算とベーテのラム・シフトの計算により, ついに物理学者は輻射補正の現実性を確信するに至った.

この時期に使われた数学の手法は驚くほど多様な概念と形式を呈示していた. シュウィンガー[85]が発展させた一つの方法は演算子法と作用原理に基づいており, 彼はこれを 1948 年に, シェルター島の次のポコノ・メイナー (Pocono Manor) の会議で報告した. 日本の朝永振一郎[86]と彼の共同研究者達はそれ以前に別のローレンツ不変な演算子形式を発展させていたが, 彼らの研究は当初西側では知られていなかった. 朝永は 1930 年代に湯川の中間子論に現れる無限大と取り組んでいた. 1947 年には彼とそのグループは依然科学情報を交換する輪の外にいて, 彼らがラム・シフトの実験を知ったのはニューズウィークの記事からだった.

一見全く異なった手法がファインマン[87]によって考え出され, ポコノの会議で彼自身により簡単に報告された. 量子場の演算子を導入する代わりに, ファインマンは S 行列を $\exp\left(iW\right)$ の汎関数積分で表現した. ここで W は古典電磁場と相互作用する一連のディラック粒子

の作用積分で, $t \to \pm\infty$ での特定の初期条件と終期条件を満たすディラック粒子のあらゆる軌跡について積分する. ファインマンの研究で実用上非常に重要な一つの結果は, S 行列要素を摂動論の任意の次数まで計算する一連の図形的規則だった. 1920 年代と 1930 年代の古い摂動論とちがい, これらのファインマン則は粒子の生成過程と反粒子の消滅過程を一まとめにし, そのためにあらゆる段階でローレンツ不変な結果が得られた. 電子の自己エネルギーに関するワイスコップの初期の計算[63]においてすでに見たように, 粒子と反粒子をそのように同等に扱った計算をして初めて, 無限大の性質が見えてくるのだ.

最後に, フリーマン・ダイソン (Freeman Dyson)[88]は 1949 年の一対の論文で, シュウィンガーと朝永の演算子形式はファインマンが見付けたのと同じ図形的規則を生み出すことを示した. ダイソンはまた一般のファインマン・ダイアグラムにおける無限大を解析し, それらが常にくりこみにより正確に取り除けるという証明の概要を示した. ダイソンの解析から推論できる最も驚くべき結果の一つは, どのような場の量子論が「くりこみ可能」かを決める基準だった. ここで「くりこみ可能」とは, 全ての無限大が有限個の結合定数と質量の再定義に吸収できるという意味だ. 特に, パウリ項 (1.1.32) は電子の磁気モーメントの予言を変えてしまうが, そのような相互作用は量子電磁理論のくりこみ可能性を損なうことがわかる. ダイソンの論文の出版によって, ついに一般的で系統的な形式が存在することになり, それは物理学者が簡単に使えるようになったし, また場の量子論を物理の問題に引き続き応用する際の共通言語となった.

この物語の不可解な側面を論じずに無限大の話を終えることはできない. オッペンハイマー[61]はすでに 1930 年に, 束縛電子の自己エネルギーの紫外発散のほとんどが, 二つの原子エネルギー準位のずれの差をとれば, 相殺することに気付いていたし, ワイスコップ[63]は 1934 年に自由電子の自己エネルギーの発散のほとんどは陽電子を含む中間

状態を考慮すれば相殺することを見付けていた. 1934 年の時点でも, 陽電子の中間状態を考慮し, かつ二つの原子状態のエネルギーのずれの差をとれば, 相対的なエネルギーのずれにおける紫外発散は除去できると推察してもおかしくなかった.* $2s_{1/2}$–$2p_{1/2}$ のエネルギー差が 1000 MHz 程度である実験的証拠[77]さえあった. それなのになぜ誰も 1947 年以前にこのエネルギー差を数値的に評価しようとしなかったのだろう.

厳密に言うと, 1939 年にそのような試み[88a]があったが, しかしそれは陽子の荷電半径という問題の不適切な部分に焦点を当てており, それは水素原子のエネルギー準位にはわずかな効果しか及ぼさない. 計算結果はそれまでの実験[77]とほぼ一致していたが, 1939 年にラム[88b]が示したように, この計算は間違いだった.

中間状態に陽電子を考慮したラム・シフトの完全に相対論的な計算は 1930 年代に, 古い非相対論的な摂動論を用いて試みることもできたはずだ. 決められた次数までの全ての項を保持する限り, 旧式の非相対論的な摂動論はファインマン・シュウィンガー・朝永の明白に相対論的な形式と同じ結果を出す. 実際ベーテの研究の後, フレンチとワイスコップおよびノーマン・クロル (Norman Kroll) とラムによるラム・シフトのアメリカで最初の精密な計算[81]はまさにそのようにして行われた. そのころ日本の朝永のグループ[81]はすでに相対論的に共変な方法を使ってこの問題やその他の問題を解いていた.

一つ欠けていたのは無限大を処理する方法としてのくりこみに確信を持つことだった. すでに見たように, くりこみは 1930 年代末には広く議論された. しかし, 量子電磁理論はほぼ 100 MeV 以上のエネルギーではまじめにとることはできず, その問題の解決は本当に大胆な

---

*実際にはこの推察は間違っている. 14.3 節で見るように, 電子の質量の輻射補正は, 原子の全てのエネルギー準位で共通な電子の静止エネルギーのずれを通じてだけでなく各準位ごとに異なる電子の運動エネルギーの変化を通じても原子のエネルギー準位に影響を与える.

新しい考え方を導入しなければ見出せないという考え方が, 1930 年代に一般に認められた知見となり, それはオッペンハイマー[89]により特に強調された観点だった.

この予想を変える出来事が幾つかシェルター島で起こった. その一つは, 前節で議論した宇宙線に関する問題が解決し始めたというニュースだった. ロバート・マルシャック (Robert Marshak) は似た質量を持った 2 種類の「中間子」, すなわち実際に観測されているミューオンと核力を担うパイオンが存在するという仮説[58]を提唱した.* もっと重要なことは, いまやラム・シフトや異常磁気モーメントの信頼できる実験値が存在し, そのお陰で物理学者は輻射補正について注意深く考えるようになった事実だった. 多分同等に重要なことは, くりこみを各人各様に無限大の問題の解決法として考えてきた理論家がその会議に一堂に会した事実だ. 1940 年代末に革命が起きたとき, その革命は, ほとんどが若いけれども保守的な役割を果たしていた物理学者達によって達成された. それは彼らの先輩達による過激な解決法の探求に背を向けながら遂行された.

関連書誌

□ S. Aramaki, 'Development of the Renormalization Theory in Quantum Electrodynamics', *Historia Scientiarum* **36**, 97 (1989); 同 **37**, 91 (1989). [1.3 節]

□ R. T. Beyer 編, *Foundations of Nuclear Physics* (Dover Publications, Inc., New York, 1949). [1.2 節]

□ L. Brown, 'Yukawa's Prediction of the Meson,' *Centauros* **25**, 71 (1981). [1.2 節]

* ［訳注］この「2 中間子」論はすでにこの会議の前年の 1946 年に日本で坂田昌一と井上健[58]により提唱されていた.

□ L. M. Brown and L. Hoddeson 編, *The Birth of Particle Physics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1983). [1.1, 1.2, 1.3 節]

□ T. Y. Cao and S. S. Schweber, 'The Conceptual Foundations and the Philosophical Aspects of Renormalization Theory,' *Synthèse* **97**, 33 (1993). [1.3 節]

□ P. A. M. Dirac, *The Development of Quantum Theory* (Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1971). [1.1 節]

□ E. Fermi, 'Quantum Theory of Radiation,' *Rev. Mod. Phys.* **4**, 87 (1932). [1.2, 1.3 節]

□ G. Gamow, *Thirty Years that Shook Physics* (Doubleday and Co., Garden City, New York, 1966). [1.1 節]

□ M. Jammer, *The Conceptual Development of Quantum Mechanics* (McGraw-Hill Book Co., New York, 1966). [1.1 節]

□ J. Mehra, 'The Golden Age of Theoretical Physics: P.A.M. Dirac's Scientific Work from 1924 to 1933,' *Aspects of Quantum Theory*, A. Salam and E. P. Wigner 編 (Cambridge University Press, Cambridge, 1972). [1.1 節]

□ A. I. Miller, *Early Quantum Electrodynamics – A Source Book* (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1994). [1.1, 1.2, 1.3 節]

□ A. Pais, *Inward Bound* (Clarendon Press, Oxford, 1986). [1.1, 1.2, 1.3 節]

□ S. S. Schweber, 'Feynman and the Visualization of Space-Time Processes,' *Rev. Mod. Phys.* **58**, 449 (1986). [1.3 節]

- □ S. S. Schweber, 'Some Chapters for a History of Quantum Field Theory: 1938–1952,' *Relativity, Groups, and Topology II*, B. S. DeWitt and R. Stora 編 (North-Holland, Amsterdam, 1984). [1.1, 1.2, 1.3 節]
- □ S. S. Schweber, 'A Short History of Shelter Island I,' *Shelter Island II*, R. Jackiw, S. Weinberg, and E. Witten 編 (MIT Press, Cambridge, MA, 1985). [1.3 節]
- □ S. S. Schweber, *QED and the Men Who Made It: Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga* (Princeton University Press, Princeton, 1994). [1.1, 1.2, 1.3 節]
- □ J. Schwinger 編, *Selected Papers in Quantum Electrodynamics* (Dover Publications Inc., New York, 1958). [1.2, 1.3 節]
- □ S.-I. Tomonaga, *The Physicist's Conception of Nature* (Reidel, Dordrecht, 1973). [1.2 and 1.3 節]
- □ S. Weinberg, 'The Search for Unity: Notes for a History of Quantum Field Theory,' *Daedalus*, Fall 1977. [1.1, 1.2, 1.3 節]
- □ V. F. Weisskopf, 'Growing Up with Field Theory: The Development of Quantum Electrodynamics in Half a Century,' 1979 年に CERN で行われた Bernard Gregory 講演, L. Brown and L. Hoddeson の前掲書に掲載されている. [1.1, 1.2, 1.3 節]
- □ G. Wentzel, 'Quantum Theory of Fields (Until 1947)' *Theoretical Physics in the Twentieth Century*, M. Fierz and V. F. Weisskopf 編 (Interscience Publishers Inc., New York, 1960). [1.2, 1.3 節]
- □ E. Whittaker, *A History of the Theories of Aether and Electricity* (Humanities Press, New York, 1973). [1.1 節]

参考文献

1. L. de Broglie, *Comptes Rendus* **177**, 507, 548, 630 (1923); *Nature* **112**, 540 (1923); Thèse de doctorat (Masson et Cie, Paris, 1924); *Annales de Physique* **3**, 22 (1925) ［*Wave Mechanics*, G. Ludwig 編 (Pergamon Press, New York, 1968) に英語で再録されている］; *Phil. Mag.* **47**, 446 (1924).

2. W. Elsasser, *Naturwiss.* **13**, 711 (1925).

3. C. J. Davisson and L. H. Germer, *Phys. Rev.* **30**, 705 (1927).

4. W. Heisenberg, *A. Phys.* **33**, 879 (1925); M. Born and P. Jordan, *Z. f. Phys.* **34**, 858 (1925); P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A109**, 642 (1925); M. Born, W. Heisenberg, and P. Jordan, *Z. f. Phys.* **35**, 557 (1925); W. Pauli, *Z. f. Phys.* **36**, 336 (1926). これらは *Sources of Quantum Mechanics*, B. L. van der Waerden 編 (Dover Publications, Inc., New York, 1968) に再録されている.

5. E. Schrödinger, *Ann. Phys.* **79**, 361, 489; **80**, 437; **81**, 109 (1926). これらの英語版が, 残念ながら若干要約した形で, 文献 1 の *Wave Mechanics* にある. *Collected Papers on Wave Mechanics*, J. F. Schearer, W. M. Deans 訳 (Blackie and Son, London, 1928) も見よ.

6. 例えば P. A. M. Dirac, *The Development of Quantum Theory* (Gordon and Breach, New York, 1971) を見よ. ディラックのシュレーディンガー追悼記事 *Nature* **189**, 355 (1961) と彼の論文 *Scientific American* **208**, 45 (1963) も見よ.

7. O. Klein, *Z. f. Phys.* **37**, 895 (1926). V. Fock, *Z. f. Phys.* **38**, 242 (1926); 同 **39**, 226 (1926) も見よ.

8. W. Gordon, *Z. f. Phys.* **40**, 117 (1926).

9. 計算の詳細は例えば L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 第 3 版 (McGraw-Hill, Inc. New York, 1968) (シッフ著「新版 量子力学」井上健訳, 吉岡書店) 51 節 を見よ.

10. F. Paschen, *Ann. Phys.* **50**, 901 (1916). これらの実験は実際には He^+ を使って行われた. なぜなら, その微細構造の分離は水素原子の場合より16倍大きいからだ. スペクトル線の微細構造は最初マイケルソンにより干渉計を用いて発見された. A. A. Michelson, *Phil. Mag.* **31**, 338 (1891); 同 **34**, 280 (1892).

10a. A. Sommerfeld, *Münchner Berichte* 1915, pp. 425, 429; *Ann. Phys.* **51**, 1, 125 (1916). W. Wilson, *Phil. Mag.* **29**, 795 (1915) も見よ.

11. G. E. Uhlenbeck and S. Goudsmit, *Naturwiss.* **13**, 953 (1925); *Nature* **117**, 264 (1926). 電子のスピンはそれ以前に別の理由でコンプトンにより提唱された. A. H. Compton, *J. Frank. Inst.* **192**, 145 (1921).

12. 1電子原子のゼーマン分裂の一般公式はA. Landé, *Z. f. Phys.* **5**, 231 (1921); 同 **7**, 398 (1921); 同 **15**, 189 (1923); 同 **19**, 112 (1923) により実験的に発見された. 当時, この公式に現れる余分な非軌道角運動量は, 原子の「核」の角運動量と考えられた; A. Sommerfeld, *Ann. Phys.* **63**, 221 (1920); 同 **70**, 32 (1923). 余分な非軌道角運動量が文献 11 のように電子のスピンによると認識されたのは後のことだ.

13. W. Heisenberg and P. Jordan, *Z. f. Phys.* **37**, 263 (1926); C. G. Darwin, *Proc. Roy. Soc.* **A116**, 227 (1927). ダーウィンによれ

ば, ほぼ同時期に幾人かがこの研究をしたが, ディラックはダーウィンだけを引用した.

14. L. H. Thomas, *Nature* **117**, 514 (1926). S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972) 5.1 節も見よ.

15. ゼーマン効果とパッシェン・バック効果および微細構造多重項におけるスペクトル線の相対強度の計算にこの理論を適用するには, P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A117**, 610 (1928). Dirac, 同 **A118**, 351 (1928) も見よ.

16. 非相対論的量子力学の確率解釈については以下を見よ. M. Born *Z. f. Phys.* **37**, 863 (1926); 同 **38**, 803 (1926) (要約された英語版が文献 1 の *Wave Mechanics* にある); G. Wentzel, *Z. f. Phys.* **40**, 590 (1926); W. Heisenberg, *Z. f. Phys.* **43**, 172 (1927). N. Bohr, *Nature* **121**, 580 (1928); Naturwissenchaften **17**, 483 (1929); *Electrons et Photons – Rapports et Discussions du V^e Conseil de Physique Solvay* (Gauthier-Villars, Paris, 1928).

17. ディラックと J. Mehra の 1969 年 3 月 28 日の会話. Mehra により *Aspects of Quantum Theory*, A. Salam, E. P. Wigner 編 (Cambridge University Press, Cambridge, 1972) に引用されている.

18. G. Gamow, *Thirty Years that Shook Physics* (Doubleday and Co., Garden City, NY, 1966) p. 125.

19. W. Pauli, *Z. f. Phys.* **37**, 263 (1926); **43**, 601 (1927).

20. C. G. Darwin, *Proc. Roy. Soc.* **A118**, 654 (1928); 同 **A120**, 621 (1928).

21. W. Gordon, *Z. f. Phys.* **48**, 11 (1928).

22. P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A126**, 360 (1930); 文献 47 も見よ.

23. E. C. Stoner, *Phil. Mag.* **48**, 719 (1924).

24. W. Pauli, *Z. f. Phys.* **31**, 765 (1925).

25. W. Heisenberg, *Z. f. Phys.* **38**, 411 (1926); 同 **39**, 499 (1926); P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A112**, 661 (1926); W. Pauli, *Z. f. Phys.* **41**, 81 (1927); J. C. Slater, *Phys. Rev.* **34**, 1293 (1929).

26. E. Fermi, *Z. f. Phys.* **36**, 902 (1926); *Rend. Accad. Lincei* **3**, 145 (1926).

27. P. A. M. Dirac, 文献 25.

27a. P. A. M. Dirac, 1989 年 4 月 17 日 に行われたミシガン大学での最初の W. R. Crane 講演 (未出版).

28. H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, 4 章 12 節, H. P. Robertson によるドイツ語第 2 版 (1931 年) からの英訳 (Dover Publications, Inc., New York). P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A133**, 61 (1931) も見よ.

29. J. R. Oppenheimer, *Phys. Rev.* **35**, 562 (1930); I. Tamm, *Z. f. Phys.* **62**, 545 (1930).

29a. P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **133**, 60 (1931).

30. C. D. Anderson, *Science* **76**, 238 (1932); *Phys. Rev.* **43**, 491 (1933). 後者は *Foundations of Nuclear Physics*, R. T. Beyer 編 (Dover Publications, Inc., New York, 1949) に再録されている.

30a. J. Schwinger, 'A Report on Quantum Electrodynamics,' *The Physicist's Conception of Nature* (Reidel, Dordrecht, 1973) p.415.

31. W. Pauli, *Handbuch der Physik* (Julius Springer, Berlin, 1932–1933); *Rev. Mod. Phys.* **13**, 203 (1941).

32. Born, Heisenberg, and Jordan, 文献 4 の 3 節.

32a. P. Ehrenfest, *Phys. Z.* **7**, 528 (1906).

33. Born and Jordan, 文献 4. 残念ながらこの論文の関連部分は文献 4 で引用した論文撰集 *Sources of Quantum Mechanics* には含まれていない.

34. P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A112**, 661 (1926) 5 節. より取っつきやすい導出は L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 第 3 版 (McGraw-Hill Book Company, New York, 1968) 44 節 (シッフ著「量子力学」井上健訳, 吉岡書店) を見よ.

34a. A. Einstein, *Phys. Z.* **18**, 121 (1917); van der Waerden の 文献 4 に英語で再録されている.

35. P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A114**, 243 (1927); *Quantum Electrodynamics*, J. Schwinger 編 (Dover Publications, Inc., New York, 1958) に再録されている.

36. P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A114**, 710 (1927).

36a. V. F. Weisskopf and E. Wigner, *Z. f. Phys.* **63**, 54 (1930).

36b. E. Fermi, *Lincei Rend.* **9**, 881 (1929); **12**, 431 (1930); *Rev. Mod. Phys.* **4**, 87 (1932).

37. P. Jordan and W. Pauli, *Z. f. Phys.* **47**, 151 (1928).

38. N. Bohr and L. Rosenfeld, *Kon. dansk. vid. Selsk., Mat.-Fys. Medd.* **XII**, No. 8 (1933) (*Selected Papers of Leon Rosenfeld*, R. S. Cohen, J. Stachel 編 (Reidel, Dordrecht, 1979) に英訳で再録されている); *Phys. Rev.* **78**, 794 (1950).

39. P. Jordan, *Z. f. Phys.* **44**, 473 (1927). 以下の論文も見よ. P. Jordan and O. Klein, *Z. f. Phys.* **45**, 751 (1929); P. Jordan, *Phys. Zeit.* **30**, 700 (1929).

40. P. Jordan and E. Wigner, *Z. f. Phys.* **47**, 631 (1928). この論文は文献 35 の *Quantum Electrodynamics* に再録されている.

40a. M. Fierz, *Helv. Phys. Acta* **12** (1939); W. Pauli, *Phys. Rev.* **58**, 716 (1940); W. Pauli and F. J. Belinfante, *Physica* **7**, 177 (1940).

41. W. Heisenberg and W. Pauli, *Z. f. Phys.* **56**, 1 (1929); 同 **59**, 168 (1930).

42. P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A136**, 453 (1932); P. A. M. Dirac, V. A. Fock, and B. Podolsky, *Phys. Zeit. der Sowjetunion* **2**, 468 (1932); P. A. M. Dirac, Phys. *Zeit. der Sowjetunion* **3**, 64 (1933). 後の二つの論文は文献 35 の *Quantum Electrodynamics*, p. 29 と p. 312 に再録されている. L. Rosenfeld, *Z. f. Phys.* **76**, 729 (1932) も見よ.

42a. P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* London **A136**, 453 (1932).

43. E. Fermi, *Z. f. Phys.* **88**, 161 (1934). Fermi は Pauli が未刊行論文で, ベータ崩壊において電子とともに未観測の中性粒子が放射されていると提唱していることを引用している. この粒子はその頃発見された中性子と区別するためにニュートリノ (neutrino) と呼ばれた.

43a. V. Fock, *C. R. Leningrad* 1933, p. 267.

44. W. H. Furry and J. R. Oppenheimer, *Phys. Rev.* **45**, 245 (1934). この論文では P. A. M. Dirac, Proc. Camb. *Phil. Soc.* **30**, 150 (1934) によって発展した密度行列の形式が使われている. 以下の論文も見よ. R. E. Peierls, *Proc. Roy. Soc.* **146**, 420 (1934); W. Heisenberg, *Z. f. Phys.* **90**, 209 (1934); L. Rosenfeld, *Z. f. Phys.* **76**, 729 (1932).

45. W. Pauli and V. Weisskopf, *Helv. Phys. Acta* **7**, 709 (1934), A. I. Miller, *Early Quantum Electrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994) に英訳で再録されている. W. Pauli, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **6**, 137 (1936) も見よ.

46. O. Klein and Y. Nishina, *Z. f. Phys.* **52**, 853 (1929); Y. Nishina, 同 869 (1929); I. Tamm, *Z. f. Phys.* **62**, 545 (1930) も見よ.

47. P. A. M. Dirac, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **26**, 361 (1930).

48. C. Møller, *Ann. d. Phys.* **14**, 531, 568 (1932).

49. H. Bethe and W. Heitler, *Proc. Roy. Soc.* **A146**, 83 (1934); G. Racah, *Nuovo Cimento* **11**, No. 7 (1934); 同 **13**, 69 (1936) も見よ.

50. H. J. Bhabha, *Proc. Roy. Soc.* **A154**, 195 (1936).

50a. J. F. Carlson and J. R. Oppenheimer, *Phys. Rev.* **51**, 220 (1937).

51. P. Ehrenfest and J. R. Oppenheimer, *Phys. Rev.* **37**, 333 (1931).

52. W. Heitler and G. Herzberg, *Naturwiss.* **17**, 673 (1929); F. Rasetti, *Z. f. Phys.* **61**, 598 (1930).

53. J. Chadwick, *Proc. Roy. Soc.* **A136**, 692 (1932). この論文は文献 30 の *The Foundations of Nuclear Physics* に再録されている.

54. W. Heisenberg, *Z. f. Phys.* **77**, 1 (1932); I. Curie-Joliot and F. Joliot, *Compt. Rend.* **194**, 273 (1932) も見よ.

54a. 参考文献としては L. M. Brown and H. Rechenberg, *Hist. Stud. in Phys. and Bio. Science*, **25**, 1 (1994) を見よ.

55. H. Yukawa, *Proc. Phys.-Math. Soc. (Japan)* (3) **17**, 48 (1935). この論文は文献 30 の *The Foundations of Nuclear Physics* に再録されている.

56. S. H. Neddermeyer and C. D. Anderson, *Phys. Rev.* **51**, 884 (1937); J. C. Street and E. C. Stevenson, *Phys. Rev.* **52**, 1003 (1937).

56a. L. Nordheim and N. Webb, *Phys. Rev.* **56**, 494 (1939).

57. M. Conversi, E. Pancini, and O. Piccioni, *Phys. Rev.* **71**, 209L (1947).

58. S. Sakata and T. Inoue, *Prog. Theor. Phys.* **1**, 143 (1946); R. E. Marshak and H. A. Bethe, *Phys. Rev.* **77**, 506 (1947).

59. C. M. G. Lattes, G. P. S. Occhialini, and C. F. Powell, *Nature* **160**, 453, 486 (1947).

60. G. D. Rochester and C. C. Butler, *Nature* **160**, 855 (1947).

61. J. R. Oppenheimer, *Phys. Rev.* **35**, 461 (1930).

62. I. Waller, *Z. f. Phys.* **59**, 168 (1930); 同 **61**, 721, 837 (1930); 同 **62**, 673 (1930).

63. V. F. Weisskopf, *Z. f. Phys.* **89**, 27 (1934), 文献 45 の *Early Quantum Electrodynamics* に英訳で再録されている; 同 **90**, 817 (1934). これらの文献では電磁的自己エネルギーは α の最低次だけしか計算されていない. 発散が摂動論の全次数で対数的であることの証明は Weisskopf, *Phys. Rev.* **56**, 72 (1939) によってなされた. (この最後の論文は文献 35 の *Quantum Electrodynamics* に再録されている).

64. P. A. M. Dirac, XVII Conseil Solvay de Physique, p. 203 (1933), 文献 45 の *Early Quantum Electrodynamics* に再録されている. その後それよりも弱い仮定に基づいてなされた計算は W. Heisenberg, *Z. f. Phys.* **90**, 209 (1934); *Sachs. Akad. Wiss.* **86**, 317 (1934); R. Serber, *Phys. Rev.* **43**, 49 (1935); E. A. Uehling. *Phys. Rev.* **48**, 55 (1935); W. Pauli and M. Rose, *Phys. Rev.* **49**, 462 (1936) を見よ. 以下の論文も見よ. Furry and Oppenheimer, 文献 44; Peierls, 文献 44; Weisskopf, 文献 63.

65. H. Euler and B. Kockel, *Naturwiss.* **23**, 246 (1935); W. Heisenberg and H. Euler, *Z. f. Phys.* **98**, 714 (1936).

66. P. A. M. Dirac, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **30**, 150 (1934).

67. W. Heisenberg, *Z. f. Phys.* **90**, 209 (1934).

68. N. Kemmer and V. F. Weisskopf. *Nature* **137**, 659 (1936).

68a. F. Bloch and A. Nordsieck, *Phys. Rev.* **52**, 54 (1937). W. Pauli and M. Fierz, *Nuovo Cimento* **15**, 167 (1938) も見よ. 後者は文献 45 の *Early Quantum Electrodynamics* に英訳で再録されている.

69. S. M. Dancoff, *Phys. Rev.* **55**, 959 (1939).

69a. H. W. Lewis, *Phys. Rev.* **73**, 173 (1948); S. Epstein, *Phys. Rev.* **73**, 177 (1948). 以下の論文も見よ. J. Schwinger, 文献 84; Z. Koba and S. Tomonaga, *Prog. Theor. Phys.* **3**/3, 290 (1948).

69b. J. Schwinger, *The Birth of Particle Physics*, L. Brown, L. Hoddeson 編 (Cambridge University Press, Cambridge, 1983) p. 336.

70. W. Heisenberg, *Ann. d. Phys.* **32**, 20 (1938), 文献 45 の *Early Quantum Electrodynamics* に英訳で再録されている.

70a. G. Wentzel, *Z. f. Phys.* **86**, 479, 635 (1933); *Z. f. Phys.* **87**, 726 (1034); M. Born and L. Infeld, *Proc. Roy. Soc.* **A150**. 141 (1935); W. Pauli, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **6**, 137 (1936).

71. J. A. Wheeler, *Phys. Rev.* **52**, 1107 (1937).

72. W. Heisenberg, *Z. f. Phys.* **120**, 513, 673 (1943); *Z. Naturforsch.* **1**, 608 (1946). 以下の論文も見よ. C. Møller, *Kon. Dansk. Vid. Sels. Mat.-Fys. Medd.* **23**, No. 1 (1945); 同 **23**, No. 19 (1946).

73. 例えば G. Chew, *The S-Matrix Theory of Strong Interactions* (W. A. Benjamin, Inc. New York, 1961) を見よ.

74. J. A. Wheeler and R. P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **17**, 157 (1945), 同 **21**, 425 (1949). これ以外の文献および遠隔相互作用の宇宙論での応用の議論については S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, 1972) 16.3 節を見よ.

75. P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A180**, 1 (1942). 批判については W. Pauli, *Rev. Mod. Phys.* **15**, 175 (1943) を見よ. この種の典型的な理論および無限大の問題を解決するための更に別な試みの概説は R. E. Peierls, *Rapports du 8me Conseil de Physique Solvay 1948* (R. Stoops, Brussels, 1950) p. 241 を見よ.

76. V. F. Weisskopf, *Kon. Dan. Vid. Sel., Mat.-fys. Medd.* **XIV**, No. 6 (1936), 特に p. 34 and pp. 5–6. この論文は 文献 35 の *Quantum Electrodynamics* に再録されている. また, 文献 45 の *Early Quantum Electrodynamics* に英訳で再録されている. 以下の論文も見よ. W. Pauli and M. Fierz, 文献 68a; H. A. Kramers, 文献 79a.

77. S. Pasternack, *Phys. Rev.* **54**, 1113 (1938). この示唆は W.V. Houston, *Phys. Rev.* **51**, 446 (1937); R. C. Williams, *Phys. Rev.* **54**, 558 (1938) の実験に基づいている. 反対のデータの報告は J. W. Drinkwater, O. Richardson, and W. E. Williams, *Proc. Roy. Soc.* **174**, 164 (1940) を見よ.

78. E. A. Uehling, 文献 64.

79. W. E. Lamb, Jr and R. C. Retherford, *Phys. Rev.* **72**, 241 (1947). この論文は文献 35 の *Quantum Electrodynamics* に再録されている.

79a. H. A. Kramers, *Nuovo Cimento* **15**, 108 (1938), 文献 45 の *Early Quantum Electrodynamics* に英訳で再録されている; *Ned. T. Natwink.* **11**, 134 (1944); *Rapports du 8^{m}e Conseil de Physique Solvay 1948* (R. Stoops, Brussels, 1950).

80. H. A. Bethe, *Phys. Rev.* **72**, 339 (1947). この論文は 文献 35 の *Quantum Electrodynamics* に再録されている.

81. J. B. French and V. F. Weisskopf; *Phys. Rev.* **75**, 1240 (1949); N. M. Kroll and W. E. Lamb, 同 **75**, 388 (1949); J. Schwinger, *Phys. Rev.* **75**, 898 (1949); R. P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 367 (1948); *Phys. Rev.*, **74**, 939, 1430 (1948); **76**, 749, 769

(1949); **80**, 440 (1950); H. Fukuda, Y. Miyamoto, and S. Tomonaga, *Prog. Theor. Phys. Rev. Mod. Phys.* **4**, 47, 121 (1948). Kroll and Lamb の論文は文献 35 の *Quantum Electrodynamics* に再録されている.

82. J. E. Nafe, E. B. Nelson, and I. I. Rabi, *Phys. Rev.* **71**, 914 (1947); D. E. Nagel, R. S. Julian, and J. R. Zacharias, *Phys. Rev.* **72**, 973 (1947).

83. P. Kusch and H. M. Foley, *Phys. Rev.* **72**, 1256 (1947).

83a. G. Breit, *Phys. Rev.* **71**, 984 (1947). Schwinger の文献 84 は Breit の結果を修正したものを含んでいる.

84. J. Schwinger, *Phys. Rev.* **73**, 416 (1948). この論文は 文献 35 の *Quantum Electrodynamics* に再録されている.

85. J. Schwinger, *Phys. Rev.* **74**, 1439 (1948); 同 **75**, 651 (1949); 同 **76**, 790 (1949); 同 **82**, 664, 914 (1951); 同 **91**, 713 (1953); *Proc. Nat. Acad. Sci.* **37**, 452 (1951). 最初の二つを除く全ての論文は, 文献 35 の *Quantum Electrodynamics* に再録されている.

86. S. Tomonaga, *Prog. Theor. Phys. Rev. Mod. Phys.* **1**, 27 (1946); Z. Koba, T. Tati, and S. Tomonaga, 同 **2**, 101 (1947); S. Kanesawa and S. Tomonaga, 同 **3**, 1, 101 (1948); S. Tomonaga, *Phys. Rev.* **74**, 224 (1948); D. Ito, Z. Koba, and S. Tomonaga, *Prog. Theor. Phys.* **3**, 276 (1948); Z. Koba and S. Tomonaga, 同 **3**, 290 (1948). 1 番目と 4 番目の論文は文献 35 の *Quantum Electrodynamics* に再録されている.

87. R. P. Feynman, *Rev. Mod. Phys.* **20**, 367 (1948); *Phys. Rev.* **74**, 939, 1430 (1948); 同 **76**, 749, 769 (1949); 同 **80**, 440 (1950).

2 番目と 3 番目を除く全ての論文は, 文献 35 の *Quantum Electrodynamics* に再録されている.

88. F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **75**, 486, 1736 (1949). これらの論文は文献 35 の *Quantum Electrodynamics* に再録されている.

88a. H. Fröhlich, W. Heitler, and B. Kahn, *Proc. Roy. Soc.* **A171**, 269 (1939); *Phys. Rev.* **56**, 961 (1939).

88b. W. E. Lamb, Jr, *Phys. Rev.* **56**, 384 (1939); *Phys. Rev.* **57**, 458 (1940).

89. R. Serber により *The Birth of Particle Physics*, 文献 69b, p. 270 に引用されている.

第 2 章

相対論的量子力学

この本の中心的な視点は, 場の量子論は量子力学と特殊相対性理論を調和させる (ある種の制限のもとではあるが) 唯一の方法だということだ. したがって, 我々の最初の仕事はローレンツ不変性のような対称性が, 量子論でどのように現れるのかを調べることだ.

2.1 量子力学

良い知らせから始めよう. 場の量子論は, 1925–26 年にシュレーディンガー, ハイゼンベルグ, パウリ, ボルンおよび他の人々によって作られ, それ以来, 原子・分子・原子核・物性の各分野で使われてきたのと同じ量子力学に基づいている. 読者は既に量子力学に通じているとし, この節では量子力学をディラックの一般的な形式[1]を使って, できるだけ手短に述べることにする.

(i) 物理的状態はヒルベルト空間内の射線で表わされる. ヒルベルト空間は一種の複素ベクトル空間だ. つまり, もし, Φ と Ψ がこの空間のベクトル (しばしば「状態ベクトル」と呼ばれる) なら, 任意の複素

数 ξ, ηを 使って作られる $\xi\Phi + \eta\Psi$ もこの空間のベクトルだ. また, ヒルベルト空間にはノルム,* つまり, 任意のベクトル対に対して, 以下を満たす複素数 (Φ, Ψ) が定義されている.

$$(\Phi, \Psi) = (\Psi, \Phi)^* \,, \tag{2.1.1}$$

$$(\Phi, \xi_1\Psi_1 + \xi_2\Psi_2) = \xi_1(\Phi, \Psi_1) + \xi_2(\Phi, \Psi_2) \,, \tag{2.1.2}$$

$$(\eta_1\Phi_1 + \eta_2\Phi_2, \Psi) = \eta_1^*(\Phi_1, \Psi) + \eta_2^*(\Phi_2, \Psi) \,. \tag{2.1.3}$$

ノルム (Ψ, Ψ) は正定値条件を満たす. これは, 一般に $(\Psi, \Psi) \geq 0$ で, このノルムは $\Psi = 0$ のときにのみゼロとなることを意味する. (他にもヒルベルト空間内でベクトルの極限が取れるための技術的は条件もある.) **射線** (ray) とは規格化された (つまり, $(\Psi, \Psi) = 1$) ベクトルの集合であり, ξ を $|\xi| = 1$ を満たす任意の複素数として, $\Psi' = \xi\Psi$ が成り立てば Ψ と Ψ' は同じ射線に属するという.

(ii) 観測量はエルミート演算子で表現される. これらはヒルベルト空間から自分自身への写像 $\Psi \to A\Psi$ であり,

$$A(\xi\Psi + \eta\Phi) = \xi A\Psi + \eta A\Phi \tag{2.1.4}$$

という意味で線形だ. そして, 実条件 $A^\dagger = A$ を満たす. ここで, 任意の線形演算子 A に対して, その共役 $A^\dagger$ は以下で定義される.

$$(\Phi, A^\dagger\Psi) \equiv (A\Phi, \Psi) = (\Psi, A\Phi)^* \,. \tag{2.1.5}$$

(また, $A\Psi$ が Ψ の関数として連続であるという技術的な仮定もある.) ある射線表現 $\mathcal{R}$ で表される状態は, この射線に属するベクトル Ψ が A の固有値 α を持つ固有状態, つまり

$$A\Psi = \alpha\Psi \tag{2.1.6}$$

*以下では, ディラックのブラ・ケット記法を使って, (Ψ_1, Ψ_2) のかわりに $\langle 1|2\rangle$ と書くこともある.

であれば, 演算子 A で表されている観測量は α という唯一の決まった値を持つ. 初等的な定理から, エルミートな A に対しては α は実数であり, 異なる α を持つ固有ベクトルは直交することがわかる.

(iii) もし系が射線 $\mathcal{R}$ で表される状態にあり, この系が互いに直交する射線 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \ldots$ で表される異なる状態の一つにあるかを実験で (たとえば, 一つ以上の観測量を測定して) 調べたとき, この系を $\mathcal{R}_n$ の状態に見出す確率は以下で与えられる.

$$P(\mathcal{R} \to \mathcal{R}_n) = |(\Psi, \Psi_n)|^2 . \tag{2.1.7}$$

ここで Ψ と Ψ_n はそれぞれ射線 $\mathcal{R}$ と $\mathcal{R}_n$ に属する任意のベクトルだ. (射線の対は, その二つの射線の状態ベクトルのスカラー積がゼロであるとき, 直交するという.) 別の初等的な定理から, 状態ベクトル Ψ_n が完全系をなすとき全確率が 1 であることがわかる.

$$\sum_n P(\mathcal{R} \to \mathcal{R}_n) = 1. \tag{2.1.8}$$

2.2 対称性

対称性変換とは実験の結果を変えない我々の視点の変化のことだ. 観測者 O が射線 $\mathcal{R}$ か $\mathcal{R}_1$ か $\mathcal{R}_2 \ldots$, で表される状態にある系を見ると, それと同等な観測者 O' は同じ系を見たときに, それぞれ, 射線 $\mathcal{R}'$ か $\mathcal{R}'_1$ か $\mathcal{R}'_2 \ldots$, で表される異なった状態を観測する. しかし, この二人の観測者は同じ確率

$$P(\mathcal{R} \to \mathcal{R}_n) = P(\mathcal{R}' \to \mathcal{R}'_n) \tag{2.2.1}$$

を見出すはずだ. (これは射線の変換が対称性変換であるための必要条件の一つにすぎない. 他の条件は次の章で論じる.) ウィグナーによって 1930 年代はじめに証明された重要な定理[2]によると, このよう

な射線 $\mathcal{R} \to \mathcal{R}'$ の任意の変換に対してヒルベルト空間の演算子 U が定義できて, もし Ψ が射線 $\mathcal{R}$ に属すならば $U\Psi$ は射線 $\mathcal{R}'$ に属し, U は**ユニタリー** (unitary) で**線形** (linear) ,

$$(U\Phi, U\Psi) = (\Phi, \Psi) \ , \tag{2.2.2}$$

$$U(\xi\Phi + \eta\Psi) = \xi U\Phi + \eta U\Psi \ , \tag{2.2.3}$$

か, もしくは, **反ユニタリー** (antiunitary) , **反線形** (antilinear) ,

$$(U\Phi, U\Psi) = (\Phi, \Psi)^* \ , \tag{2.2.4}$$

$$U(\xi\Phi + \eta\Psi) = \xi^* U\Phi + \eta^* U\Psi \ , \tag{2.2.5}$$

にできる. ウィグナーの証明では幾つかの段階が飛ばされている. より完全な証明をこの章の終わりの補遺 A に与える.

すでに述べたように, 線形演算子 L の共役演算子は,

$$(\Phi, L^\dagger\Psi) \equiv (L\Phi, \Psi) \tag{2.2.6}$$

で与えられる. この条件は反線形演算子には満たすことができない. なぜなら, その場合, (2.2.6) の右辺は Φについて線形だが左辺はΦについて反線形になるからだ. 反線形演算子 A の共役は, 上の代わりに,

$$(\Phi, A^\dagger\Psi) \equiv (A\Phi, \Psi)^* = (\Psi, A\Phi) \tag{2.2.7}$$

と定義する. この定義を使えば, ユニタリー性と反ユニタリー性は共に以下のように書ける.

$$U^\dagger = U^{-1} \ . \tag{2.2.8}$$

常に恒等演算子 $U = 1$ で表される, 自明な対称性 $\mathcal{R} \to \mathcal{R}$ が存在する. この演算子は当然ながらユニタリーで線形だ. 連続性から, (回転, 並進, ローレンツ変換のような) 対称性変換が (角度, 距離, 速度のような) パラメータを連続的に変えて恒等変換にできるときは, 反線形で

反ユニタリーな演算子ではなく, 線形でユニタリーな演算子 U で表されることがわかる. (反線形で反ユニタリーな演算子は物理で, それ程は目立たない. それらは全て時間の流れを逆転することに関係している. 2.6 節を見よ.)

特に, 恒等変換から微小しか離れていない対称性変換は, 1 から微小しか離れていない線形ユニタリー演算子で表される.

$$U = 1 + i\epsilon t \; . \tag{2.2.9}$$

ここで, ϵ は実数の微小量だ. これがユニタリーで線形であるためには, t はエルミートで線形でなければならず, したがって, 何らかの観測量となりえる. 実際, 物理に現れる角運動量や運動量など, ほとんど (多分, 全て) の観測量はこのように対称性変換から発生する.

対称性変換の集合は, 以下の性質を満たし, 群 (group) を構成する. T_1 が射線 $\mathcal{R}_n$ を $\mathcal{R}'_n$ に変換し, 別の変換 T_2 が $\mathcal{R}'_n$ を $\mathcal{R}''_n$ に変換するなら, これらを両方とも行うと T_2T_1 と書ける別の対称性変換ができて, これは $\mathcal{R}_n$ を $\mathcal{R}''_n$ に変換する. また, 対称性変換 T が射線 $\mathcal{R}_n$ を $\mathcal{R}'_n$ に変換するとき, それには, T^{-1} と書く逆が存在し, $\mathcal{R}'_n$ を $\mathcal{R}_n$ に変換する. また, 恒等変換 $T = 1$ があり, これは射線を変えない.

これらの対称性変換に相当するユニタリーか反ユニタリーな演算子 $U(T)$ はこの群構造を反映する性質を持っている. ただ, 対称性変換自身とは異なり, $U(T)$ は射線ではなくヒルベルト空間のベクトルに作用するという点が多少物事を複雑にしている. T_1 が $\mathcal{R}_n$ を $\mathcal{R}'_n$ に変換するとき, $U(T_1)$ は射線 $\mathcal{R}_n$ に属するベクトル Ψ_n に作用すると射線 $\mathcal{R}'_n$ に属するベクトル $U(T_1)\Psi_n$ を与える. 同様に, T_2 がこの射線を $\mathcal{R}''_n$ に変換するなら, $U(T_1)\Psi_n$ に作用すると, ベクトル $U(T_2)U(T_1)\Psi_n$ は射線 $\mathcal{R}''_n$ に属する. しかし, $U(T_2T_1)\Psi_n$ もまたこの射線に属するから, これらのベクトルは互いに位相 $\phi_n(T_2, T_1)$ を除いて一致すること

になる.

$$U(T_2)U(T_1)\Psi_n = e^{i\phi_n(T_2,T_1)}U(T_2T_1)\Psi_n \ . \tag{2.2.10}$$

さらに, 一つの重要な例外を除いて, $U(T)$ の線形性 (または反線形性) から, この位相は状態 Ψ_n に依存しないことがわかる. これは以下のように証明される. いま, 互いに比例関係にない二つのベクトル Ψ_A, Ψ_B を考える. このとき, (2.2.10) を状態 $\Psi_{AB} \equiv \Psi_A + \Psi_B$ に施すと,

$$\begin{aligned} e^{i\phi_{AB}}\, U(T_2T_1)(\Psi_A + \Psi_B) &= U(T_2)U(T_1)(\Psi_A + \Psi_B) \\ &= U(T_2)U(T_1)\Psi_A + U(T_2)U(T_1)\Psi_B \\ &= e^{i\phi_A}U(T_2T_1)\Psi_A + e^{i\phi_B}U(T_2T_1)\Psi_B \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

を得る. どんなユニタリーか反ユニタリーな演算子にも, 逆 (つまり共役) 演算子があり, それもユニタリーか反ユニタリーになっている. (2.2.11) に左から $U^{-1}(T_2T_1)$ を施すと以下を得る.

$$e^{\pm i\phi_{AB}}(\Psi_A + \Psi_B) = e^{\pm i\phi_A}\Psi_A + e^{\pm i\phi_B}\Psi_B \ . \tag{2.2.12}$$

上下の符号はそれぞれ, $U(T_2T_1)$ がユニタリーと反ユニタリーの場合だ. Ψ_A と Ψ_B は線形独立なので, これは以下が満たされるときにのみ可能だ.

$$e^{i\phi_{AB}} = e^{i\phi_A} = e^{i\phi_B} \ . \tag{2.2.13}$$

したがって, (2.2.10) の位相は状態ベクトル Ψ_n に依らないことが示せた. このためこの式は演算子の関係式として書ける.

$$U(T_2)U(T_1) = e^{i\phi(T_2,T_1)}U(T_2T_1) \ . \tag{2.2.14}$$

$\phi = 0$ の場合は, $U(T)$ は対称性変換の群表現を与えるという. 一般的な位相 $\phi(T_2, T_1)$ の場合は, いわゆる射影表現になっている. これはまた, 「位相をのぞいては」表現になっているともいう. リー群の構造

だけからは, 物理的な状態ベクトルが通常の表現を与えるか射影表現を与えるかはわからない. しかし, 後でみるように, この群が固有の射影表現を持つどうかはわかる.

(2.2.14) を導く議論の例外は, 系を $\Psi_A+\Psi_B$で表される状態に置けないときに発生する. 例えば, 系を全角運動量が整数の状態と半整数の状態の重ね合せの状態に置くことはできないと広く信じられている. このような場合には, 異なる類の状態の間に「超選択則」[3] があるという. 位相 $\phi(T_2,T_1)$ は, $U(T_2)U(T_1)$ と $U(T_2,T_1)$ がどちらの類の状態に作用するかに依存することもできる. 2.7 節でこれらの位相と射影表現について更に論じることにする. そこでわかるように, 射影表現を持つどんな対称群も (物理的な意味を変更することなしに) その表現が常に $\phi=0$ の非射影表現になるように拡大することが出来る. 2.7 節まで, 単にこれが既に実行されていて (2.2.14) で$\phi=0$ となっているとする.

連結リー群 (connected Lie group) と呼ばれる種類の群は物理で特に重要な役割をする. 連結リー群とは, その変換 $T(\theta)$ が有限個の実の連続パラメータの集合, 例えばθ^aで記述され, どの元も単位元と群の内部の経路で結ばれている群をいう. この場合, 群の積は,

$$T(\bar{\theta})T(\theta)=T\Big(f(\bar{\theta},\theta)\Big) \tag{2.2.15}$$

という形をとる. ここで, $f^a(\bar{\theta},\theta)$ は $\bar{\theta}$ と θ の関数だ. $\theta^a=0$ を単位元の座標とすると,

$$f^a(\theta,0)=f^a(0,\theta)=\theta^a \tag{2.2.16}$$

でなければならない. すでに述べたように, このような連続群の変換は物理的ヒルベルト空間上では (反ユニタリーではなく) ユニタリー演算子 $U(T(\theta))$ で表現される. リー群ではこれらの演算子は少なくと

も単位元の有界な近傍で巾級数,

$$U\Big(T(\theta)\Big) = 1 + i\theta^a t_a + \tfrac{1}{2}\,\theta^b\theta^c t_{bc} + \cdots \tag{2.2.17}$$

で表される. ここで, t_a, $t_{bc} = t_{cb}$, などは θ に依存しないエルミート演算子だ. $U(T(\theta))$ はこの変換群の (射影でなく) 通常の表現, つまり,

$$U\Big(T(\bar\theta)\Big)U\Big(T(\theta)\Big) = U\Big(T(f(\bar\theta,\theta))\Big) \tag{2.2.18}$$

であるとする. この条件を θ^a と $\bar\theta^a$ について巾展開するとどうなるか見てみよう. (2.2.16) にしたがうと, $f^a(\bar\theta,\theta)$ を 2 次まで展開すると,

$$f^a(\bar\theta,\theta) = \theta^a + \bar\theta^a + f^a{}_{bc}\bar\theta^b\theta^c + \cdots \tag{2.2.19}$$

となる. ここで, $f^a{}_{bc}$ は実係数だ. (もし, θ^2 か $\bar\theta^2$ の次数の項があると (2.2.16) が成立しない.) このとき, (2.2.18) は以下のようになる.

$$\begin{aligned}
&\left[1 + i\bar\theta^a t_a + \tfrac{1}{2}\,\bar\theta^b\bar\theta^c t_{bc} + \cdots\right] \times \left[1 + i\theta^a t_a + \tfrac{1}{2}\theta^b\theta^c t_{bc} + \cdots\right] \\
&\quad = 1 + i\left(\theta^a + \bar\theta^a + f^a{}_{bc}\bar\theta^b\theta^c + \cdots\right)t_a \\
&\qquad + \tfrac{1}{2}(\theta^b + \bar\theta^b + \cdots)\left(\theta^c + \bar\theta^c + \cdots\right)t_{bc} + \cdots .
\end{aligned} \tag{2.2.20}$$

$1, \theta, \bar\theta, \theta^2, \bar\theta^2$ の次数の項は自動的に (2.2.20) の両辺で一致するが, $\bar\theta\theta$ の項からは以下の自明でない条件が得られる.

$$t_{bc} = -t_b t_c - i\, f^a{}_{bc}\, t_a\,. \tag{2.2.21}$$

これは, 群の構造, つまり, 関数 $f(\theta,\bar\theta)$ がわかって, その 2 次の項の係数 $f^a{}_{bc}$ を知れば, $U(T(\theta))$ の 1 次の項に現れる生成子 t_a を使って, 2 次の項が求めれることを示している. しかし, 演算子 t_{bc} は b と c について対称であり (この対称性は, この演算子が $U(T(\theta))$ の θ^b と θ^c についての 2 回微分であることによる), そのための無矛盾条件が存在する. これは (2.2.21) より,

$$[t_b,\, t_c] = i\, C^a{}_{bc}\, t_a \tag{2.2.22}$$

となる. ここで, $C^a{}_{bc}$ は**構造定数** (structure constant) と呼ばれる実定数だ.

$$C^a{}_{bc} \equiv -f^a{}_{bc} + f^a{}_{cb} \,. \tag{2.2.23}$$

この交換関係は**リー代数** (Lie algebra) と呼ばれる. 2.7 節で, 交換関係 (2.2.22) がこの過程を続ける為に必要な唯一の条件であることを実質上証明する. つまり, $U(T(\theta))$ の完全な巾級数は, 1 次項, つまり生成子 t_a を知っている限り, (2.2.21) のような関係式を無限に続けることで得られる. これは必ずしも, 演算子 $U(T(\theta))$ が t_a から全ての θ^a に対して一意的に決まることは意味しない. しかし, $U(T(\theta))$ は少なくとも座標 $\theta^a = 0$ の単位元の有界な近傍で, $\theta, \bar{\theta}$ と $f(\theta, \bar{\theta})$ がこの近傍にあるなら (2.2.15) が満たされるという意味で, 一意的に決まる. 全ての θ^a への拡張については 2.7 節で論じる.

これから幾度もであう重要で特別の場合がある. これは, 関数 $f(\theta, \bar{\theta})$ が (多分, 座標 θ^aの部分集合について) 単に加法的, つまり,

$$f^a(\theta, \bar{\theta}) = \theta^a + \bar{\theta}^a \tag{2.2.24}$$

となる場合だ. これは時空での並進とか, 固定軸の周りの回転 (両方同時には含まない) の場合だ. このときには, (2.2.19) の係数 $f^a{}_{bc}$ も構造定数 (2.2.23) もゼロとなる. したがって, 生成子は全て可換だ.

$$[t_b,\ t_c] = 0 \,. \tag{2.2.25}$$

このような群は**可換** (Abelian) だといわれる. この場合は, $U(T(\theta))$ が全ての θ^a について容易に計算できる. (2.2.18) と (2.2.24) から, 任意の整数 N について,

$$U\Big(T(\theta)\Big) = \left[U\left(T\left(\frac{\theta}{N}\right)\right)\right]^N$$

となる. $N \to \infty$ として, $U(T(\theta/N))$ の 1 次項のみを残しておくと,

$$U\Big(T(\theta)\Big) = \lim_{N\to\infty}\left[1 + \frac{i}{N}\theta^a t_a\right]^N$$

となるので,

$$U\Big(T(\theta)\Big) = \exp(it_a\theta^a) \tag{2.2.26}$$

となることがわかる.

2.3　量子論的ローレンツ変換

アインシュタインの相対性原理によれば,「慣性」系の間の同等性が成立する. それは, ニュートン力学が従うガリレイの相対性原理からは, 異なる慣性系の座標を結び付ける変換で区別される. x^μ をある慣性系の座標 (x^1, x^2, x^3をデカルト空間座標, 光速度を 1 として $x^0 = t$ を時間座標) とする. 他の慣性系では座標 x'^μ は,

$$\eta_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{2.3.1}$$

または, それと同等な,

$$\eta_{\mu\nu}\ \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} = \eta_{\rho\sigma} \tag{2.3.2}$$

を満たさなければならない. ここで, $\eta_{\mu\nu}$ は以下の要素を持つ対角行列だ.

$$\eta_{11} = \eta_{22} = \eta_{33} = +1,\quad \eta_{00} = -1\ . \tag{2.3.3}$$

また, ここでは和の記法を使っている. つまり, (2.3.2) の μ や ν の添字のように同じ項に上に 1 回, 下に 1 回, 合計 2 回現れるどの添字についても和をとる. これらの変換は, 光速が全ての慣性系で同じ (我々の単位では 1) だという特別の性質を持つ.* 速さ 1 で進んでいる光波は $|d\mathbf{x}/dt| = 1$ を満たす. 言い換えると, $\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = d\mathbf{x}^2 - dt^2 = 0$ したがって, $\eta_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu = 0$ となり, $|d\mathbf{x}'/dt'| = 1$ だ.

---

*共形変換 (conformal transformation) と呼ばれるより広い類の座標変換では, $\eta_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu$ が $\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ と一般に同じではないが, 比例して, 光速を不変に保つ. 2 次元の共形変換は, 弦理論と統計力学で非常に重要であることが知られているが, 4 次元時空での有用性はまだ明確ではない.

(2.3.2) を満たすどんな座標変換 $x^\mu \to x'^\mu$ も線形[3a], つまり a^μ を任意の定数, $\Lambda^\mu{}_\nu$ を定数行列として,

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \tag{2.3.4}$$

と書ける. ここで, $\Lambda^\mu{}_\nu$ は次の条件を満たす.

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\nu{}_\sigma = \eta_{\rho\sigma} \,. \tag{2.3.5}$$

目的によっては, ローレンツ変換の条件を異なった風に書いておくと有用だ. 行列 $\eta_{\mu\nu}$ は逆を持つので, それを $\eta^{\mu\nu}$と書く. この逆行列は, 対角行列で, $\eta^{00} = -1$, $\eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = +1$ と, $\eta_{\mu\nu}$ と同じ要素を持っている. (2.3.5) に $\eta^{\sigma\tau}\Lambda^\kappa{}_\tau$ をかけ, わかりやすいように括弧を入れて,

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho(\Lambda^\nu{}_\sigma\Lambda^\kappa{}_\tau\eta^{\sigma\tau}) = \Lambda^\kappa{}_\rho = \eta_{\mu\nu}\eta^{\nu\kappa}\Lambda^\mu{}_\rho$$

を得る. 行列 $\eta_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho$ の逆を更にかけると,

$$\Lambda^\nu{}_\sigma\Lambda^\kappa{}_\tau\eta^{\sigma\tau} = \eta^{\nu\kappa} \tag{2.3.6}$$

となる.

これらの変換は群をなす. ローレンツ変換 (2.3.4) を最初に行って, 第二のローレンツ変換 $x'^\mu \to x''^\mu$ を次に行うと,

$$x''^\mu = \bar\Lambda^\mu{}_\rho x'^\rho + \bar a^\mu = \bar\Lambda^\mu{}_\rho(\Lambda^\rho{}_\nu x^\nu + a^\rho) + \bar a^\mu$$

となる. したがって, これは次のローレンツ変換, $x^\mu \to x''^\mu$ と同じだ.

$$x''^\mu = (\bar\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\rho{}_\nu)x^\nu + (\bar\Lambda^\mu{}_\rho a^\rho + \bar a^\mu) \,. \tag{2.3.7}$$

(もし, $\Lambda^\mu{}_\nu$ と $\bar\Lambda^\mu{}_\nu$ の両方とも (2.3.5) を満たせば, $\bar\Lambda^\mu{}_\rho\Lambda^\rho{}_\nu$ もそれを満たすので, これはローレンツ変換になっている. ここで, 棒線は異な

るローレンツ変換を区別する為にだけ使っている.) したがって, 変換 $T(\Lambda, a)$ は物理的状態に施されたとき, 合成則,

$$T(\bar{\Lambda}, \bar{a})T(\Lambda, a) = T(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a}) \tag{2.3.8}$$

を満たす. (2.3.5) の行列式をとると, 次を得る.

$$(\mathrm{Det}\Lambda)^2 = 1 \,. \tag{2.3.9}$$

したがって, $\Lambda^\mu{}_\nu$ には逆, $(\Lambda^{-1})^\nu{}_\rho$ があり, それは (2.3.5) から,

$$(\Lambda^{-1})^\rho{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\rho \equiv \eta_{\nu\mu}\eta^{\rho\sigma}\Lambda^\mu{}_\sigma \tag{2.3.10}$$

であるとわかる. 変換 $T(\Lambda, a)$ の逆は, (2.3.8) から $T(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$, であり, 恒等変換は当然, $T(1, 0)$ となっている.

前節の議論によれば, 変換 $T(\Lambda, a)$ は物理的ヒルベルト空間のベクトルにユニタリー線形変換を引き起こす.

$$\Psi \to U(\Lambda, a)\Psi \,.$$

演算子 U は合成則

$$U(\bar{\Lambda}, \bar{a})U(\Lambda, a) = U(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a}) \tag{2.3.11}$$

を満たす. (既に述べたように, (2.3.11) の右辺に位相因子が現れるのを防ぐには, ローレンツ群を拡張する必要がある. これに必要な拡張は 2.7 節で述べる.)

変換 $T(\Lambda, a)$ の全体がなす群は **非斉次ローレンツ群** (inhomogeneous Lorentz group) , または, **ポアンカレ群** (Poincaré group) と呼ばれる. これは幾つかの重要な部分群を持っている. まず第一に, $a^\mu = 0$ の変換は,

$$T(\bar{\Lambda}, 0)\, T(\Lambda, 0) = T(\bar{\Lambda}\Lambda, 0), \tag{2.3.12}$$

を満たすので, 明らかに部分群をなす. これは**斉次ローレンツ群** (homogeneous Lorentz group) と呼ばれる.

また, (2.3.9) から, $\mathrm{Det}\Lambda = +1$ か $\mathrm{Det}\Lambda = -1$ であることがわかる. $\mathrm{Det}\Lambda = +1$ の変換は明らかに, 斉次または非斉次ローレンツ群の部分群をなす. さらに, (2.3.5) と (2.3.6) の 00 成分から,

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \Lambda^i{}_0\Lambda^i{}_0 = 1 + \Lambda^0{}_i\Lambda^0{}_i \qquad (2.3.13)$$

を得る. ここで, i については, 1, 2, 3 について和をとる. これより, $\Lambda^0{}_0 \geq +1$ か $\Lambda^0{}_0 \leq -1$ であることがわかる. $\Lambda^0{}_0 \geq +1$ の変換は部分群をなす. もし $\Lambda^\mu{}_\nu$ と $\bar{\Lambda}^\mu{}_\nu$ がそのようなΛなら,

$$(\bar{\Lambda}\Lambda)^0{}_0 = \bar{\Lambda}^0{}_0\Lambda^0{}_0 + \bar{\Lambda}^0{}_1\Lambda^1{}_0 + \bar{\Lambda}^0{}_2\Lambda^2{}_0 + \bar{\Lambda}^0{}_3\Lambda^3{}_0$$

が成立する. しかし, (2.3.13) から, 3 元ベクトル $(\Lambda^1{}_0, \Lambda^2{}_0, \Lambda^3{}_0)$ は長さ $\sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2 - 1}$ を持ち, 同様に 3 元ベクトル $(\bar{\Lambda}^0{}_1, \bar{\Lambda}^0{}_2, \bar{\Lambda}^0{}_3)$ は長さが $\sqrt{(\bar{\Lambda}^0{}_0)^2 - 1}$ であるので, これらの二つの 3 元ベクトルは

$$\left|\bar{\Lambda}^0{}_1\Lambda^1{}_0 + \bar{\Lambda}^0{}_2\Lambda^2{}_0 + \bar{\Lambda}^0{}_3\Lambda^3{}_0\right| \leq \sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2 - 1}\sqrt{(\bar{\Lambda}^0{}_0)^2 - 1} \qquad (2.3.14)$$

という制限にしたがうことがわかる. したがって,

$$(\bar{\Lambda}\Lambda)^0{}_0 \geq \bar{\Lambda}^0{}_0\Lambda^0{}_0 - \sqrt{(\Lambda^0{}_0)^2 - 1}\sqrt{(\bar{\Lambda}^0{}_0)^2 - 1} \quad \geq 1$$

となる. $\mathrm{Det}\,\Lambda = +1$ と$\Lambda^0{}_0 \geq +1$ のローレンツ変換の部分群は**固有順時ローレンツ群** (proper orthochronous Lorentz group) と呼ばれる. パラメータを連続的に変化させて $\mathrm{Det}\,\Lambda = +1$ から $\mathrm{Det}\,\Lambda = -1$ へ飛んだり, $\Lambda^0{}_0 \geq +1$ から$\Lambda^0{}_0 \leq -1$ へ飛ぶことはできないので, 単位元から連続的にパラメータを変えて得られるローレンツ変換は, 単位元と同じ符号の $\mathrm{Det}\,\Lambda$ と$\Lambda^0{}_0$ を持つ. したがって, それらは固有順時ローレンツ群に属する.

どんなローレンツ変換も固有で順時であるか, または, 固有順時ローレンツ群の要素と離散的変換 $\mathcal{P}$ か $\mathcal{T}$ か $\mathcal{PT}$ の積になっている. ここで, $\mathcal{P}$ は空間反転で, そのゼロでない要素は,

$$\mathcal{P}^0{}_0 = 1,\ \mathcal{P}^1{}_1 = \mathcal{P}^2{}_2 = \mathcal{P}^3{}_3 = -1 \tag{2.3.15}$$

であり, $\mathcal{T}$ は時間反転行列で, そのゼロでない要素は,

$$\mathcal{T}^0{}_0 = -1,\ \mathcal{T}^1{}_1 = \mathcal{T}^2{}_2 = \mathcal{T}^3{}_3 = 1 \tag{2.3.16}$$

だ. したがって, 全ローレンツ群を調べるには, その固有順時部分群に加えて, 空間反転と時間反転を調べればよい. この空間反転と時間反転は 2.6 節で調べる. それまでは, 斉次か非斉次の固有順時ローレンツ群のみを扱うことにする.

2.4 ポアンカレ代数

2.2 節でみたように, どんな対称リー群の情報もほぼ単位元の近傍の元の性質に含まれている. 非斉次ローレンツ群については, 単位元は$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$, $a^\mu = 0$ の変換であるから, $\omega^\mu{}_\nu$ と ϵ^μ のどちらも微小量として,

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu \qquad a^\mu = \epsilon^\mu \tag{2.4.1}$$

となるような変換の性質を調べよう. このとき, ローレンツ変換の条件 (2.3.5) は

$$\begin{aligned}\eta_{\rho\sigma} &= \eta_{\mu\nu}(\delta^\mu{}_\rho + \omega^\mu{}_\rho)\,(\delta^\nu{}_\sigma + \omega^\nu{}_\sigma) \\ &= \eta_{\sigma\rho} + \omega_{\sigma\rho} + \omega_{\rho\sigma} + O(\omega^2)\end{aligned}$$

となる. ここで, 添字は $\eta_{\mu\nu}$ か $\eta^{\mu\nu}$ との縮約で上げ下げする. つまり,

$$\omega_{\sigma\rho} \equiv \eta_{\mu\sigma}\omega^\mu{}_\rho\,,$$

$$\omega^\mu{}_\rho \equiv \eta^{\mu\sigma}\omega_{\sigma\rho}$$

という記法を使っている. この記法はこの本を通して使うことにする. ローレンツ変換の条件 (2.3.5) で ω について 1 次の項のみをとると, この条件が $\omega_{\mu\nu}$ の反対称性条件に帰着することがわかる.

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \, . \tag{2.4.2}$$

4 次元の任意の反対称 2 階テンソルは $(4 \times 3)/2 = 6$ 個の独立な成分を持つので, ϵ^μ の 4 個の成分と合わせて, 非斉次ローレンツ変換は $6 + 4 = 10$ 個のパラメータを持つ.

$U(1,0)$ はどんな射線もそれ自身に変換するので, 恒等演算子に比例しなければならない.* これは, 位相を選ぶことによって恒等演算子に等しくおける. こうすれば, (2.4.1) の微小ローレンツ変換で, $U(1+\omega,\epsilon)$ は 1 に $\omega_{\rho\sigma}$ と ϵ_ρについて線形の項を加えたものとなる. これを以下のように書く.

$$U(1+\omega,\epsilon) = 1 + \tfrac{1}{2} i\, \omega_{\rho\sigma} J^{\rho\sigma} - i\epsilon_\rho P^\rho + \cdots \, . \tag{2.4.3}$$

ここで, $J^{\rho\sigma}$ と P^ρ は ω と ϵ に依存しない演算子であり, $\cdots$ は ω や ϵ についてより高次の項を表わす. $U(1+\omega,\epsilon)$ がユニタリーであるためには, 演算子 $J^{\rho\sigma}$ と P^ρ はエルミートでなければならない.

$$J^{\rho\sigma\dagger} = J^{\rho\sigma} \quad , \quad P^{\rho\dagger} = P^\rho \, . \tag{2.4.4}$$

$\omega_{\rho\sigma}$ は反対称だから, その係数 $J^{\rho\sigma}$ も反対称としてよい.

$$J^{\rho\sigma} = -J^{\sigma\rho} \, . \tag{2.4.5}$$

後でみるように, P^1, P^2, P^3 は運動量演算子の成分であり, J^{23}, J^{31}, J^{12} は角運動量演算子の成分, そして P^0 はエネルギー演算子, すなわち,

---

*超選択則が無ければ, $U(1,0)$ が作用する状態に比例因子が依存する可能性は無くなる. これは, 2.2 節で対称群の射影表現の位相が, 対称性が作用する状態に依る可能性を排除したのと同じ事情だ. 超選択則があれば, $U(1,0)$ をそれが作用する類に依存する位相因子によって再定義することが必要な場合もありうる.

ハミルトニアン (Hamiltonian) だ.**

$J^{\rho\sigma}$ と P^ρのローレンツ変換性を次に調べる. 積,

$$U(\Lambda, a)\, U(1+\omega, \epsilon) U^{-1}(\Lambda, a)$$

を考える. ここで, $\Lambda^\mu{}_\nu$ と a^μ は新しい変換のパラメータであり, ω と ϵ には関係ない. (2.3.11) によれば, 積 $U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)\, U(\Lambda, a)$ は $U(1,0)$ に等しいから, $U(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$ は $U(\Lambda, a)$ の逆だ. したがって, (2.3.11) から,

$$U(\Lambda, a) U(1+\omega, \epsilon) U^{-1}(\Lambda, a) = U\left(\Lambda(1+\omega)\Lambda^{-1}, \Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a\right) \tag{2.4.6}$$

となる. ω と ϵ について 1 次では, 以下となる.

$$U(\Lambda, a)\left[\tfrac{1}{2}\omega_{\rho\sigma}J^{\rho\sigma} - \epsilon_\rho P^\rho\right] U^{-1}(\Lambda, a) = \tfrac{1}{2}(\Lambda\omega\Lambda^{-1})_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - (\Lambda\epsilon - \Lambda\omega\Lambda^{-1}a)_\mu P^\mu\ . \tag{2.4.7}$$

この式の両辺で $\omega_{\rho\sigma}$ と ϵ_ρ の係数を比べると, ((2.3.10) も使って) 以下を得る.

$$U(\Lambda, a) J^{\rho\sigma} U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma (J^{\mu\nu} - a^\mu P^\nu + a^\nu P^\mu)\ , \tag{2.4.8}$$

$$U(\Lambda, a) P^\rho\, U^{-1}(\Lambda, a) = \Lambda_\mu{}^\rho P^\mu\ . \tag{2.4.9}$$

斉次ローレンツ変換 ($a^\mu = 0$) では, これらの変換則は単に $J^{\mu\nu}$ がテンソルであり, P^μ がベクトルであることを意味する. 純粋な並進 ($\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$) では, これらから, P^ρ が並進不変であるが, $J^{\rho\sigma}$ はそうではないことがわかる. 特に, $J^{\rho\sigma}$の空間–空間成分の空間並進のもとでの変化は, 角運動量がそれを計算する原点の変化のもとでの変化になっている.

** ここで角運動量演算子と同定する理由は $J^{\mu\nu}$ の交換関係にあることがわかる. 一方, 交換関係からは, P^μ と $-P^\mu$ を区別できない. したがって, (2.4.3) の $\epsilon_\rho P^\rho$ の符号は約束事に過ぎない. (2.4.3) での符号の選び方が通常のハミルトニアン P^0 の定義と矛盾しないことは 3.1 節でみる.

次に, (2.4.8) と (2.4.9) をそれ自身微小, つまり $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ で $a^\mu = \epsilon^\mu$ である変換に適用してみよう. ここで, 微小量 $\omega^\mu{}_\nu$ と ϵ^μ は前の ω と ϵ に無関係とする. (2.4.3) を使って, $\omega^\mu{}_\nu$ と ϵ^μ について 1 次の項のみを残すと, (2.4.8) と (2.4.9) は以下となる.

$$i\left[\tfrac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \epsilon_\mu P^\mu\ ,\ J^{\rho\sigma}\right] = \omega_\mu{}^\rho J^{\mu\sigma} + \omega_\nu{}^\sigma J^{\rho\nu} - \epsilon^\rho P^\sigma + \epsilon^\sigma P^\rho\ , \quad (2.4.10)$$

$$i\left[\tfrac{1}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} - \epsilon_\mu P^\mu\ ,\ P^\rho\right] = \omega_\mu{}^\rho P^\mu\ . \quad (2.4.11)$$

これらの式の両辺の $\omega_{\mu\nu}$ と ϵ_μ の係数を比べると, 以下の交換関係が導ける.

$$i\left[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}\right] = \eta^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu}J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu}J^{\rho\mu}\ , \quad (2.4.12)$$

$$i\left[P^\mu\ ,\ J^{\rho\sigma}\right] = \eta^{\mu\rho}P^\sigma - \eta^{\mu\sigma}P^\rho\ , \quad (2.4.13)$$

$$\left[P^\mu\ ,\ P^\rho\right] = 0\ . \quad (2.4.14)$$

これがポアンカレ群のリー代数だ.

量子力学では保存される演算子, つまりエネルギー演算子 $H = P^0$ と可換な演算子が特別な役割をする. (2.4.13) と (2.4.14) から, 3 元運動量ベクトル,

$$\mathbf{P} = \left\{P^1, P^2, P^3\right\} \quad (2.4.15)$$

と 3 元角運動量ベクトル,

$$\mathbf{J} = \left\{J^{23}, J^{31}, J^{12}\right\} \quad (2.4.16)$$

ともちろんエネルギー P^0 それ自身が保存することがわかる. 残りの生成子はいわゆる 3 元「ブースト」演算子だ.

$$\mathbf{K} = \left\{J^{10}, J^{20}, J^{30}\right\}\ . \quad (2.4.17)$$

これらは保存されず, このため $\mathbf{K}$ の固有値は物理的状態を表わすためには使わない. 3 次元記法では, 交換関係 (2.4.12), (2.4.13), (2.4.14)

は以下のように書かれる.

$$[J_i, J_j] = i\,\epsilon_{ijk} J_k\ , \tag{2.4.18}$$

$$[J_i, K_j] = i\,\epsilon_{ijk} K_k\ , \tag{2.4.19}$$

$$[K_i, K_j] = -i\,\epsilon_{ijk} J_k\ , \tag{2.4.20}$$

$$[J_i, P_j] = i\,\epsilon_{ijk} P_k\ , \tag{2.4.21}$$

$$[K_i, P_j] = iH\delta_{ij}\ , \tag{2.4.22}$$

$$[J_i, H] = [P_i, H] = [H, H] = 0\ , \tag{2.4.23}$$

$$[K_i, H] = i\,P_i\ . \tag{2.4.24}$$

ここで, i, j, k 等は 1, 2, 3 の値をとり, ϵ_{ijk} は $\epsilon_{123} = +1$ となる完全反対称テンソルだ. 交換関係 (2.4.18) は角運動量演算子のものになっている.

純粋な並進 $T(1, a)$ は非斉次ローレンツ群の部分群をなす. この群の積の法則は, (2.3.7) によって,

$$T(1, \bar{a})T(1, a) = T(1, \bar{a} + a) \tag{2.4.25}$$

となっている. これは (2.2.24) と同じ意味で加法的であり, (2.4.3) を使って, (2.2.26) を導いた際と同じ議論を繰り返すと, 有限な並進が物理的ヒルベルト空間上で以下のように表現されることがわかる.

$$U(1, a) = \exp(-iP^\mu a_\mu). \tag{2.4.26}$$

全く同様に, $\boldsymbol{\theta}$ の周りの角度 $|\boldsymbol{\theta}|$ の回転 $R_{\boldsymbol{\theta}}$ は物理的ヒルベルト空間で,

$$U(R_{\boldsymbol{\theta}}, 0) = \exp(i\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\theta}) \tag{2.4.27}$$

と表現される.

ポアンカレ代数と, ニュートン力学の対称群, つまりガリレイ群のリー代数を比べると興味深い. この代数は, ガリレイ群の変換則から

出発してここでポアンカレ代数を導いたのと同じ方法で導ける. しかし, 既に (2.4.18)–(2.4.24) があるので, ガリレイ代数をポアンカレ代数の低速度の極限として導く方が簡単だ. これは**イネヌ** (Inönü)・**ウィグナー縮約**[4,5] として知られている. 代表的な質量が m 程度で, 代表的な速度が vの粒子系では, 運動量と角運動量演算子は $\mathbf{J} \sim 1$, $\mathbf{P} \sim mv$ の大きさだと考えられる. 一方, Mを全質量とし, 質量以外のエネルギー (運動エネルギーとポテンシャル・エネルギー) を W とすると, 全エネルギー演算子は $H = M + W$ と書ける. それぞれ, 大きさは, $M \sim m$, $W \sim mv^2$となっている. (2.4.18)–(2.4.24) から, 交換関係は $v \ll 1$ のときには以下の形になっていることがわかる.

$$
\begin{aligned}
&[J_i, J_j] = i\,\epsilon_{ijk}\,J_k\ , \qquad [J_i, K_j] = i\,\epsilon_{ijk}\,K_k\ , \qquad [K_i, K_j] = 0\ , \\
&[J_i, P_j] = i\,\epsilon_{ijk}\,P_k\ , \qquad [K_i, P_j] = i\,M\delta_{ij}\ , \\
&[J_i, W] = [P_i, W] = 0\ , \qquad [K_i, W] = i\,P_i\ , \\
&[J_i, M] = [P_i, M] = [K_i, M] = [W, M] = 0\ .
\end{aligned}
$$

ここで, $\mathbf{K}$ は $1/v$の大きさだ. 並進 $\mathbf{x} \to \mathbf{x}+\mathbf{a}$ と「ブースト」$\mathbf{x} \to \mathbf{x}+\mathbf{v}t$ の積は, 並進 $\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{a}$ のはずだが, ヒルベルト空間でこれらの演算子はそうは働かない.

$$
\exp(i\mathbf{K}\cdot\mathbf{v})\,\exp(-i\mathbf{P}\cdot\mathbf{a}) = \exp(iM\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}/2)\,\exp\left(i(\mathbf{K}\cdot\mathbf{v} - \mathbf{P}\cdot\mathbf{a})\right)\ .
$$

位相因子 $\exp(iM\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}/2)$ が現れることは, ここでは, これらの演算子が射影表現であり, 超選択則によって異なる質量の状態の重ね合わせが禁じられていることを意味している. この意味で, ポアンカレ群はガリレイ群よりも数学的に簡単だ. しかし, ガリレイ群のリー代数に, 全ての生成子と可換でその固有値がいろいろな状態の質量になっている生成子を付け加えて, ガリレイ群を形式的に拡張してもなんら問題は無い. こうすれば, 物理的状態は拡張された対称群の射影表現では

なく, 通常の表現となる. この差は単に記法の問題と思えるかも知れないが, 違いは, このガリレイ群の再解釈では質量に関する超選択則が不必要なことだ.

2.5 1 粒子状態

1 粒子状態を非斉次ローレンツ群のもとでの変換に従って分類する.

4 元エネルギー・運動量テンソルは互いに可換だから, 物理的状態ベクトルをこの 4 元ベクトルの固有値を使って表わすことは自然だ. その他の自由度を全て添字 σ を使って表わし, 状態ベクトル $\Psi_{p,\sigma}$ は,

$$P^{\mu}\Psi_{p,\sigma} = p^{\mu}\Psi_{p,\sigma} \tag{2.5.1}$$

を満たすとする. 一般の状態は, 例えば幾つかの束縛されていない粒子からなり, そのとき添字 σ は離散的のみならず連続的な値もとる. 1 粒子状態の定義に, 添字 σ が純粋に離散的だという条件も含めることにして, ここでは, この場合に話を限る. (この定義では, 水素原子の基底状態のように, 2 粒子かそれ以上の特定の束縛状態は 1 粒子状態として考える. これは基本粒子ではないが, 複合粒子と基本粒子の違いはここでは重要ではない.)

(2.5.1) と (2.4.26) から状態 $\Psi_{p,\sigma}$ が並進のもとで以下のように変換することがわかる.

$$U(1,a)\Psi_{p,\sigma} = e^{-ip\cdot a}\Psi_{p,\sigma}\ .$$

これらの状態が斉次ローレンツ変換のもとでどう変換するかを考える.

(2.4.9) を使うと, $\Psi_{p,\sigma}$ に量子論的な斉次ローレンツ変換 $U(\Lambda,0)\equiv U(\Lambda)$ を施すと, 4 元運動量の固有値が Λp の状態ができることがわかる.

$$P^{\mu}U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = U(\Lambda)\left[U^{-1}(\Lambda)P^{\mu}U(\Lambda)\right]\Psi_{p,\sigma} = U(\Lambda)(\Lambda_{\rho}^{-1\,\mu}P^{\rho})\Psi_{p,\sigma}$$

$$= \Lambda^{\mu}{}_{\rho} p^{\rho} U(\Lambda) \Psi_{p,\sigma} \,. \tag{2.5.2}$$

したがって, $U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma}$ は状態ベクトル$\Psi_{\Lambda p,\sigma'}$の線形結合でなければならない.

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sum_{\sigma'} C_{\sigma'\sigma}(\Lambda, p) \Psi_{\Lambda p,\sigma'} \,. \tag{2.5.3}$$

一般に, $\Psi_{p,\sigma}$ の適切な線形結合を使って, σ の添字を行列 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)$ がブロック対角になるように選べる. このとき, $\Psi_{p,\sigma}$ のうちで σ が一つのブロック内にあるものが, それ自身で非斉次ローレンツ群の表現になっている. このような, それ以上にこの分解ができないという意味で既約な表現の成分をまとめて, 一種類の粒子と特定するのが自然だ.* したがって, 非斉次ローレンツ群の既約表現での係数 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)$ の構造を調べることにする.

この目的のために, 全ての固有順時ローレンツ変換 $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ のもとで不変な関数は, 不変平方 $p^2 \equiv \eta_{\mu\nu}p^{\mu}p^{\nu}$ と $p^2 \leq 0$ のときの p^0 の符号であることに着目する. したがって, p^2 の値と ($p^2 \leq 0$ のときの) p^0 の符号それぞれに対して,「基準となる」4 元運動量 k^{μ}を選んで, その類に属するどんな p^{μ} も以下のように表わすことにする.

$$p^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu}(p) k^{\nu} \,. \tag{2.5.4}$$

ここで, $L^{\mu}{}_{\nu}$ は基準となるローレンツ変換で, p^{μ} に依存するとともに, k^{μ} に何を選んだかにも陰に依存する. こうすると, 運動量 p の状態 $\Psi_{p,\sigma}$ を,

$$\Psi_{p,\sigma} \equiv N(p)\, U(L(p)) \Psi_{k,\sigma} \tag{2.5.5}$$

---

*もちろん, 異なる種類の粒子が同型, つまり行列 $C_{\sigma'\sigma}(\Lambda,p)$ が同じか, 相似変換で関係しているということもある. 場合によっては, 非斉次固有順時ローレンツ群を部分群として含むより大きな群の既約表現として粒子の種類を定義するのが便利だ. 例えば, 後でみるように, 空間の反転対称性を満たす相互作用を持つ質量ゼロの粒子については, 空間反転を含む非斉次ローレンツ群の既約表現の全ての成分を一つの粒子の種類として扱うのが普通だ.

と定義できる. ここで, $N(p)$ は規格化の数因子であり, 後で選ぶ. ここまでは, 添字 σ がいろいろな運動量とどう関係しているかについては何も論じていない. (2.5.5) がこのギャップを埋める.

(2.5.5) に任意の斉次ローレンツ変換 $U(\Lambda)$ を施すと, 以下を得る.

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} &= N(p)\,U(\Lambda L(p))\Psi_{k,\sigma} \\ &= N(p)\,U(L(\Lambda p))\,U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))\,\Psi_{k,\sigma}\,. \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

ローレンツ変換 $L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$ は k を $L(p)k = p$ に, そして, Λp に, つぎに, kに戻す. (2.5.6) の最後の段階の重要な点は, この変換が斉次ローレンツ群の部分群に属するということだ. この部分群は k^μ を不変に保つローレンツ変換 $W^\mu{}_\nu$ からなっている.

$$W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu. \tag{2.5.7}$$

この部分群は小群 (little group) と呼ばれている.[5] (2.5.7) を満たすどのような W についても, 以下が成立する.

$$U(W)\Psi_{k,\sigma} = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(W)\Psi_{k,\sigma'}\,. \tag{2.5.8}$$

係数 $D(W)$ は小群の表現を与える. つまり, どのような元 $\bar{W}, W$ についても,

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}(\bar{W}W)\Psi_{k,\sigma'} &= U(\bar{W}W)\Psi_{k,\sigma} = U(\bar{W})U(W)\Psi_{k,\sigma} \\ &= U(\bar{W})\sum_{\sigma''} D_{\sigma''\sigma}(W)\Psi_{k,\sigma''} = \sum_{\sigma'\sigma''} D_{\sigma''\sigma}(W)D_{\sigma'\sigma''}(\bar{W})\Psi_{k,\sigma'} \end{aligned}$$

となり, したがって, 以下が成立する.

$$D_{\sigma'\sigma}(\bar{W}W) = \sum_{\sigma''} D_{\sigma'\sigma''}(\bar{W})D_{\sigma''\sigma}(W)\,. \tag{2.5.9}$$

特に, (2.5.8) を小群の変換,

$$W(\Lambda, p) \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) \tag{2.5.10}$$

に適用して, (2.5.6) を使うと,

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = N(p)\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}\left(W(\Lambda,p)\right)U\left(L(\Lambda p)\right)\Psi_{k,\sigma'}$$

を得る. (2.5.5) の定義を思い出すと,

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \left(\frac{N(p)}{N(\Lambda p)}\right)\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}\left(W(\Lambda,p)\right)\Psi_{\Lambda p,\sigma'} \qquad (2.5.11)$$

となることがわかる. 規格化の問題を除けば, 変換則 (2.5.3) の係数 $C_{\sigma'\sigma}$ を決めるという問題は, 小群の表現を求めるという問題に帰着することがわかった. 非斉次ローレンツ群のような群の表現を小群の表現から求めるこの方法は, 誘導表現の方法と呼ばれる.[6]

表 2.1 にいろいろな種類の 4 元運動量について, 基準となる運動量 k^μ の便利な選び方と, それに対応する小群を挙げる.

これらの 4 元運動量の六つの種類の内, (a), (c), (f) のみが物理的状態と解釈できることが知られている. (f) $p^\mu = 0$ の場合については あまり述べる必要もないだろう. これは真空を意味し, $U(\Lambda)$ で不変になっている. 以下では, (a) と (c) の場合のみを考える. これらは, それぞれ, $M > 0$ と質量ゼロの場合だ.

ここで, ちょっと止まって, これらの状態の規格化を論じる. 量子力学の通常の正規直交化により, 基準運動量 k^μ の状態が以下の意味で正規直交するように選ぶ.

$$\left(\Psi_{k',\sigma'}, \Psi_{k,\sigma}\right) = \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k})\delta_{\sigma'\sigma}\,. \qquad (2.5.12)$$

(デルタ関数は $\Psi_{k,\sigma}$ と $\Psi_{k',\sigma'}$ がそれぞれ $\mathbf{k}$ と $\mathbf{k}'$ の固有値を持つエルミート演算子の固有状態であることから現れる.) これよりすぐに, (2.5.8) と (2.5.11) の小群の表現がユニタリーであることがわかる.**

$$D^\dagger(W) = D^{-1}(W)\,. \qquad (2.5.13)$$

**$p^2 > 0$ と $p^\mu = 0$ の小群 $SO(2,1)$ と $SO(3,1)$ は, 自明でない有限次元ユニタリー表現を持たない. したがって, 小群のもとで非自明に変換する $p^2 > 0$ か $p^\mu = 0$ の運動量の状態が一つでもあれば, 必らず無限個あることになる.

表 2.1: いろいろな種類の 4 元運動量についての基準となる運動量 k^μ と対応する小群. ここで, κ は任意の正のエネルギーで, 例えば 1 eV ととってよい. 小群はほとんどのものが簡単にわかる. $SO\,(3)$ は 3 次元での (空間反転を除く) 通常の回転群だ. これは, 回転が, 運動量ゼロの静止した粒子を不変に保つ唯一の固有順時ローレンツ変換だからだ. また, $SO\,(2,1)$ と $SO\,(3,1)$ はそれぞれ, $(2+1)$ 次元と $(3+1)$ 次元でのローレンツ群だ. 群 $ISO\,(2)$ はユークリッド幾何の群であり, 2 次元の回転と並進からなる. これが $p^2 = 0$ の小群であることは以下に説明する.

	基準となる k^μ	小群
(a) $p^2 = -M^2 < 0,\ p^0 > 0$	$(0,0,0,M)$	$SO\,(3)$
(b) $p^2 = -M^2 < 0,\ p^0 < 0$	$(0,0,0,-M)$	$SO\,(3)$
(c) $p^2 = 0,\ p^0 > 0$	$(0,\ 0,\ \kappa, \kappa\ )$	$ISO\,(2)$
(d) $p^2 = 0,\ p^0 < 0$	$(0,\ 0,\ \kappa, -\kappa\ )$	$ISO\,(2)$
(e) $p^2 = N^2 > 0$	$(0,0,N,0)$	$SO\,(2,1)$
(f) $p^\mu = 0$	$(0,\ 0,\ 0,\ 0)$	$SO\,(3,1)$

さて, 任意の運動量について, スカラー積はどうなるだろうか? (2.5.5) と (2.5.11) の演算子 $U(\Lambda)$ のユニタリー性から, スカラー積が以下のようになることがわかる.

$$\begin{aligned}(\Psi_{p',\sigma'},\Psi_{p,\sigma}) &= N(p)\left(U^{-1}\left(L(p)\right)\Psi_{p',\sigma'},\ \Psi_{k,\sigma}\right)\\ &= N(p)N^*(p')D\left(W(L^{-1}(p),p')\right)^*_{\sigma\sigma'}\ \delta^3(\mathbf{k}'-\mathbf{k})\,.\end{aligned}$$

ここで, $k' \equiv L^{-1}(p)p'$ だ. また, $k = L^{-1}(p)p$ だから, デルタ関数 $\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$ は $\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$ に比例する. $p' = p$ のとき, ここに現れる小群の変換は $W(L^{-1}(p),p) = 1$ と自明で, したがってスカラー積は,

$$(\Psi_{p'\sigma'},\Psi_{p,\sigma}) = |N(p)|^2\delta_{\sigma'\sigma}\delta^3(\mathbf{k}'-\mathbf{k}) \tag{2.5.14}$$

となる. 残りは, $\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$ と $\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$ の比例係数だ. 任意のスカラー関数 $f(p)$ の 4 元運動量が $-p^2 = M^2 \geq 0$ と $p^0 > 0$ (つまり (a) か (c) の場合) の領域でのローレンツ不変な積分は以下のように書くことができる.

$$\begin{aligned}&\int d^4p\,\delta(p^2+M^2)\theta(p^0)f(p)\\ &= \int d^3\mathbf{p}\,dp^0\ \delta((p^0)^2-\mathbf{p}^2-M^2)\theta(p^0)f(\mathbf{p},p^0)\\ &= \int d^3\mathbf{p}\frac{f(\mathbf{p},\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2})}{2\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2}}\,.\end{aligned}$$

($\theta(p^0)$ は階段関数だ. つまり, $x \geq 0$ のときに$\theta(x) = 1$ であり, $x < 0$ のときに $\theta(x) = 0$ となる.) 「質量殻」 $p^2 + M^2 = 0$ の上で積分するときには, 不変体積要素は,

$$d^3\mathbf{p}/\sqrt{\mathbf{p}^2+M^2} \tag{2.5.15}$$

で与えられる. デルタ関数は,

$$F(\mathbf{p}) = \int F(\mathbf{p}')\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')d^3\mathbf{p}'$$

$$= \int F(\mathbf{p}') \left[\sqrt{\mathbf{p}'^2 + M^2} \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \right] \frac{d^3\mathbf{p}'}{\sqrt{\mathbf{p}'^2 + M^2}}$$

と定義されるから, 不変デルタ関数は, 以下で与えられる.

$$\sqrt{\mathbf{p}'^2 + M^2} \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = p^0 \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) . \tag{2.5.16}$$

p' と p はそれぞれローレンツ変換 $L(p)$ で k' と k に関係しているから,

$$p^0 \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = k^0 \delta^3(\mathbf{k}' - \mathbf{k})$$

となり, したがって, 以下が成立する.

$$(\Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{p,\sigma}) = |N(p)|^2 \delta_{\sigma'\sigma} \left(\frac{p^0}{k^0} \right) \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) . \tag{2.5.17}$$

規格化定数 $N(p)$ はしばしば単に $N(p) = 1$ と選ばれるが, しかし, そうするとスカラー積に因子 p^0/k^0 が登場する. このため, ここではよりよく用いられる定義,

$$N(p) = \sqrt{k^0/p^0} \tag{2.5.18}$$

をとり,

$$(\Psi_{p',\sigma'}, \Psi_{p,\sigma}) = \delta_{\sigma'\sigma} \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \tag{2.5.19}$$

とする.

ここで, 物理的に重要な二つの場合, すなわち質量 $M > 0$ と質量ゼロの粒子を考察する.

正定値質量

この場合, 小群は 3 次元回転群だ. そのユニタリー表現は, $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \cdots$ の $2j+1$ 次元ユニタリー既約表現 $D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(R)$ の直和に分解できる.[7] これは, 微小な行列 $\Theta_{ik} = -\Theta_{ki}$ による基準的な微小回転の行列 $R_{ik} = \delta_{ik} + \Theta_{ik}$から作られる.

$$D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(1 + \Theta) = \delta_{\sigma'\sigma} + \frac{i}{2} \Theta_{ik} (J^{(j)}_{ik})_{\sigma'\sigma} , \tag{2.5.20}$$

$$
\begin{aligned}
(J_{23}^{(j)} \pm iJ_{31}^{(j)})_{\sigma'\sigma} &= (J_1^{(j)} \pm iJ_2^{(j)})_{\sigma'\sigma} \\
&= \delta_{\sigma',\sigma\pm 1}\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}\,, \qquad (2.5.21)
\end{aligned}
$$

$$
(J_{12}^{(j)})_{\sigma'\sigma} = (J_3^{(j)})_{\sigma'\sigma} = \sigma\delta_{\sigma'\sigma}\,. \qquad (2.5.22)
$$

ここで, σ は $j, j-1, \cdots, -j$ の値をとる. 質量 $M > 0$ でスピン j の粒子では, (2.5.11) は以下となる.

$$
U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}^{(j)}\left(W(\Lambda,p)\right)\Psi_{\Lambda p,\sigma'}\,. \qquad (2.5.23)
$$

ここで, 小群の元 $W(\Lambda,p)$ (ウィグナー回転[5]) は (2.5.10) で与えられる.

$$
W(\Lambda,p) = L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p).
$$

この回転を計算するには, 4 元運動量を $k^\mu = (0,0,0,M)$ から p^μ へ変化させる「基準ブースト」$L(p)$ を使う必要がある. これは以下のように便宜的に選ばれる.

$$
\begin{aligned}
L^i{}_k(p) &= \delta_{ik} + (\gamma-1)\hat{p}_i\hat{p}_k \\
L^i{}_0(p) &= L^0{}_i(p) = \hat{p}_i\sqrt{\gamma^2-1}\,, \qquad (2.5.24) \\
L^0{}_0(p) &= \gamma\,.
\end{aligned}
$$

ここで, 以下の定義を使った.

$$
\hat{p}_i \equiv p_i/|\mathbf{p}|, \qquad \gamma \equiv \sqrt{\mathbf{p}^2+M^2}/M\,.
$$

重要なのは, $\Lambda^\mu{}_\nu$ が任意の 3 次元回転 $\mathcal{R}$ であるとき, ウィグナー回転 $W(\Lambda,p)$ が全ての p について, $\mathcal{R}$ と同じだということだ. これをみるには, ブースト (2.5.24) が以下のように表せることを使う.

$$
L(p) = R(\hat{\mathbf{p}})B(|\mathbf{p}|)R^{-1}(\hat{\mathbf{p}})\,.
$$

ここで, $R(\hat{\mathbf{p}})$ は (後に (2.5.47) で基準となるものを定義する) 回転で, 3 軸を $\mathbf{p}$ の方向に向けるもので, また, 以下を使った.

$$B(|\mathbf{p}|)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & \sqrt{\gamma^2-1} \\ 0 & 0 & \sqrt{\gamma^2-1} & \gamma \end{bmatrix}.$$

こうすると任意の回転 $\mathcal{R}$ に対して,

$$W(\mathcal{R},p)=R(\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}})B^{-1}(|\mathbf{p}|)R^{-1}(\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}})\mathcal{R}\,R(\hat{\mathbf{p}})B(|\mathbf{p}|)R^{-1}(\hat{\mathbf{p}})$$

となる. しかし, 回転 $R^{-1}(\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}})\mathcal{R}\,R(\hat{\mathbf{p}})$ は 3 軸を $\hat{\mathbf{p}}$ の方向, 次に $\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}}$, そして元の 3 軸に回すから, 3 軸の周りのある角度 θ の回転になっていなければならない.

$$R^{-1}(\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}})\mathcal{R}\,R(\hat{\mathbf{p}})=R(\theta)\equiv\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$R(\theta)$ は $B(|\mathbf{p}|)$ と可換だから, これより,

$$W(\mathcal{R},p)=R(\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}})B^{-1}(|\mathbf{p}|)R(\theta)B(|\mathbf{p}|)R^{-1}(\hat{\mathbf{p}})=R(\mathcal{R}\hat{\mathbf{p}})R(\theta)R^{-1}(\hat{\mathbf{p}})$$

となる. したがって,

$$W(\mathcal{R},p)=\mathcal{R}$$

となり, これが示したかったことだ. つまり, 動いている質量がゼロでない粒子の状態 (そして, それを拡張して, 多粒子状態) は回転のもとで, 非相対論の場合と同じように変換する. これは, もう一つの良い知らせだ. — 球面調和関数, クレブシュ・ゴルダン係数等のいろいろな道具すべてが, 非相対論的量子力学から相対論的量子力学にすっかり持って来れるのだ.

ゼロ質量

最初に小群の構造を調べなければならない. k^μ をこの場合の基準となる 4 元運動量 $k^\mu = (0,0,1,1)$ として, $W^\mu{}_\nu k^\nu = k^\mu$ を満たす小群の元 $W^\mu{}_\nu$ を考える. そのようなローレンツ変換が時間的 4 元ベクトル $t^\mu = (0,0,0,1)$ に働いてできた 4 元ベクトル Wt は, その長さおよび $Wk = k$ との内積が t と同じだ.

$$(Wt)^\mu (Wt)_\mu = t^\mu t_\mu = -1 ,$$
$$(Wt)^\mu k_\mu = t^\mu k_\mu = -1 .$$

第二の条件を満たす任意の 4 元ベクトルは以下のように書ける.

$$(Wt)^\mu = (\alpha, \beta, \zeta, 1+\zeta) .$$

そして, 第一の条件から, 以下の関係が成立する.

$$\zeta = (\alpha^2 + \beta^2)/2 . \tag{2.5.25}$$

したがって, $W^\mu{}_\nu$ の t^ν への影響は, ローレンツ変換,

$$S^\mu{}_\nu(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 1-\zeta & \zeta \\ \alpha & \beta & -\zeta & 1+\zeta \end{bmatrix} \tag{2.5.26}$$

と同じだ. これは, W が $S(\alpha,\beta)$ に等しいことを意味するのではなく, $S^{-1}(\alpha,\beta)W$ が時間的 4 元ベクトル (0,0,0,1) を不変にするローレンツ変換であること, したがって, 純粋な回転であることを意味する. また, $S^\mu{}_\nu$ は $W^\mu{}_\nu$ のように光錐的 4 元ベクトル (0,0,1,1) を不変にする. したがって, $S^{-1}(\alpha,\beta)W$ は 3 軸の周りのある角度 θの回転だ.

$$S^{-1}(\alpha,\beta)W = R(\theta) . \tag{2.5.27}$$

ここで,

$$R^{\mu}{}_{\nu}(\theta) \equiv \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

したがって, 小群のもっとも一般的な元は, 以下の形をしている.

$$W(\theta,\alpha,\beta) = S(\alpha,\beta)R(\theta) . \qquad (2.5.28)$$

これは何の群だろうか? $\theta = 0$ か$\alpha = \beta = 0$ の変換は部分群をなすことがわかる.

$$S(\bar{\alpha},\bar{\beta})S(\alpha,\beta) = S(\bar{\alpha}+\alpha,\bar{\beta}+\beta) , \qquad (2.5.29)$$

$$R(\bar{\theta})R(\theta) = R(\bar{\theta}+\theta) . \qquad (2.5.30)$$

これらの群は可換 — つまり, その元は全て互いに可換だ. さらに, $\theta = 0$ の部分群は, その元が群のどの元によっても同じ部分群の元にしか変換されないという意味で, 不変だ.

$$R(\theta)S(\alpha,\beta)R^{-1}(\theta) = S(\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta, -\alpha\sin\theta+\beta\cos\theta) . \qquad (2.5.31)$$

(2.5.29)-(2.5.31) より, どんな群の元の積も計算できる. 読者は, これらの積の法則は, $ISO(2)$ 群と同じであることに気付くはずだ. この群は, 2 次元での (ベクトル $(\alpha,\beta$) による) 並進と (角度 θの) 回転からなっている.

不変な可換部分群を持たない群は幾つかの簡単な性質を持っている. そのため, これらの群は**半単純** (semi-simple) と呼ばれる. これまでに見たように, 小群 $ISO(2)$ は非斉次ローレンツ群と同じく, 半単純ではない. このため, 事情は複雑になって, 興味深いことが起きる. 最初に $ISO(2)$ のリー代数を調べる. θ,α,β が微小のとき, 一般的な群の

元は,

$$W(\theta,\alpha,\beta)^{\mu}{}_{\nu}=\delta^{\mu}{}_{\nu}+\omega^{\mu}{}_{\nu}\ ,$$
$$\omega_{\mu\nu}=\begin{bmatrix}0&\theta&-\alpha&\alpha\\-\theta&0&-\beta&\beta\\\alpha&\beta&0&0\\-\alpha&-\beta&0&0\end{bmatrix}$$

となる. (2.4.3) から, 対応するヒルベルト空間の演算子は以下であることがわかる.

$$U(W(\theta,\alpha,\beta))=1+i\alpha A+i\beta B+i\theta J_3\ . \tag{2.5.32}$$

ここで, A と B はエルミート演算子,

$$A=-J^{13}+J^{10}=J_2+K_1\ , \tag{2.5.33}$$
$$B=-J^{23}+J^{20}=-J_1+K_2\ , \tag{2.5.34}$$

であり, 以前と同じように, $J_3=J_{12}$だ. (2.4.18)–(2.4.20) からか, (2.5.29)–(2.5.31) から直接に, これらの演算子が以下の交換関係を満たすことが導ける.

$$[J_3,A]=+iB\ , \tag{2.5.35}$$
$$[J_3,B]=-iA\ , \tag{2.5.36}$$
$$[A,B]=0\ . \tag{2.5.37}$$

A と B は可換なエルミート演算子だから, (非斉次ローレンツ群の運動量演算子のように) 状態 $\Psi_{k,a,b}$で同時対角化できる.

$$A\Psi_{k,a,b}=a\Psi_{k,a,b}\ ,$$
$$B\Psi_{k,a,b}=b\Psi_{k,a,b}\ .$$

問題は, もしそのようなゼロでない A, Bの固有値が一つでも見つかれば, 連続した固有値の全体が見つかることにある. (2.5.31) から,

$$U[R(\theta)]A\,U^{-1}[R(\theta)] = A\cos\theta - B\sin\theta\ ,$$
$$U[R(\theta)]B\,U^{-1}[R(\theta)] = A\sin\theta + B\cos\theta$$

が導ける. したがって, 任意の θについて,

$$A\Psi^{\theta}_{k,a,b} = (a\cos\theta - b\sin\theta)\Psi^{\theta}_{k,a,b}\ ,$$
$$B\Psi^{\theta}_{k,a,b} = (a\sin\theta + b\cos\theta)\Psi^{\theta}_{k,a,b}$$

となる. ここで,

$$\Psi^{\theta}_{k,a,b} \equiv U^{-1}\left(R(\theta)\right)\Psi_{k,a,b}$$

だ. 質量ゼロの粒子でθのような連続的な自由度を持っているものは観測されていない. したがって, 上のような連続した状態を避けるために, 物理的状態 (いまは$\Psi_{k,\sigma}$ と呼ぶ) は $a = b = 0$ の固有値を持つ A と B の固有状態とする.

$$A\Psi_{k,\sigma} = B\Psi_{k,\sigma} = 0\ . \qquad (2.5.38)$$

これらの状態は残りの生成子の固有値で区別できる.

$$J_3\Psi_{k,\sigma} = \sigma\Psi_{k,\sigma}\ . \qquad (2.5.39)$$

運動量 $\mathbf{k}$ は 3 軸方向にあるので, σ は角運動量の運動方向成分, すなわちヘリシティ (helicity) だ.

以上で, 一般的な質量ゼロの粒子の状態のローレンツ変換性を計算できる. まず, 2.2 節の一般的な議論により, (2.5.32) を有限な α と β に一般化して,

$$U(S(\alpha,\beta)) = \exp(i\alpha A + i\beta B) \qquad (2.5.40)$$

を得る. また, 有限な θ では,

$$U(R(\theta)) = \exp(iJ_3\theta) \tag{2.5.41}$$

となる. 小群の任意の元 W は (2.5.28) の形に書けて,

$$U(W)\Psi_{k,\sigma} = \exp(i\alpha A + i\beta B)\exp(i\theta J_3)\Psi_{k,\sigma} = \exp(i\theta\sigma)\Psi_{k,\sigma}$$

となるので, (2.5.8) から,

$$D_{\sigma'\sigma}(W) = \exp(i\theta\sigma)\delta_{\sigma'\sigma}$$

となる. ここで, θ は W を (2.5.28) のように表したときの角度だ. 任意のヘリシティの質量ゼロ粒子のローレンツ変換性は (2.5.11) と (2.5.18) から, 以下のようになる.

$$U(\Lambda)\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\exp\left(i\sigma\theta(\Lambda,p)\right)\Psi_{\Lambda p,\sigma}\,. \tag{2.5.42}$$

ここで, $\theta(\Lambda,p)$ は以下で定義される.

$$W(\Lambda,p) \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) \equiv S\left(\alpha(\Lambda,p),\beta(\Lambda,p)\right)R\left(\theta(\Lambda,p)\right)\,. \tag{2.5.43}$$

5.9 節で, 小群の中のパラメータ α と βで張られる部分から電磁的ゲージ不変性が生じることをみる.

ここまでででは, 質量ゼロの粒子のヘリシティが任意の実数であることを禁じる理由は見当たらない. 2.7 節で見るように, σを整数か半整数に制限するのは質量がゼロでない粒子と同様に, トポロジー的な理由だ.

Λ と pが与えられたとき, 小群の元 (2.5.43) を計算する (それを用いると, 次節でこれらの状態への空間反転と時間反転の影響も計算できる) ためには, $k^\mu = (0,0,\kappa,\kappa)$ を p^μに変換するための基準となる

ローレンツ変換を決めておく必要がある. これには以下の形を使うと便利だ.

$$L(p) = R(\hat{\mathbf{p}})B(|\mathbf{p}|/\kappa)\,. \tag{2.5.44}$$

ここで, $B(u)$ は 3 軸方向の純粋なブーストだ.

$$B(u) \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (u^2+1)/2u & (u^2-1)/2u \\ 0 & 0 & (u^2-1)/2u & (u^2+1)/2u \end{bmatrix}\,. \tag{2.5.45}$$

また, $R(\hat{\mathbf{p}})$ は 3 軸を単位ベクトル $\hat{\mathbf{p}}$ に回す純粋な回転だ. たとえば, $\hat{\mathbf{p}}$ が極座標 θ, ϕ を持つとする.

$$\hat{\mathbf{p}} = (\sin\theta\cos\phi,\ \sin\theta\sin\phi,\ \cos\theta)\,. \tag{2.5.46}$$

このとき, $R(\hat{\mathbf{p}})$ を $(0,0,1)$ を $(\sin\theta,\ 0,\ \cos\theta)$ へ回す 2 軸周りの角度 θ の回転と, それに続く 3 軸周りの角度 ϕ の回転とする.

$$U(R(\hat{\mathbf{p}})) = \exp(-i\phi J_3)\,\exp(-i\theta J_2)\,. \tag{2.5.47}$$

ここで, $0 \le \theta \le \pi$,　$0 \le \phi < 2\pi$だ. (θ かϕ を 2π ずらすと同じ $R(\hat{\mathbf{p}})$ の回転が得られるが, 整数か, 半整数のスピン状態に作用するかによって $U(R(\hat{\mathbf{p}}))$ の符号は異なるので, $R(\hat{\mathbf{p}})$ ではなく, $U(R(\hat{\mathbf{p}}))$ を ϕ と θ の範囲と共に与える.) (2.5.47) は回転で, 3 軸を (2.5.46) の方向に回すので, そのような他のどんな $R(\hat{\mathbf{p}})$ もこれとせいぜい, 最初の 3 軸周りの回転しか違わない. これは, 単に 1 粒子状態の位相の再定義にしかすぎない.

ヘリシティがローレンツ不変であることに着目しよう. あるヘリシティ σ の質量ゼロの粒子は, 全ての慣性系で (その運動量を除いては) 同じに見える. 実際, 質量ゼロの粒子の異なるヘリシティ状態は, 別の種類の粒子と考えてもよい. しかし, 次の節でみるように, ヘリシティ

が反対の粒子は空間反転対称性で関係している. したがって, 電磁的, 重力的な相互作用が空間反転対称性を持つので, 電磁的現象にともなうヘリシティ ±1 の質量ゼロの粒子は, 両方とも**光子** (photon) と呼ばれるし, また, 重力にともなうと考えられるヘリシティ ±2 の質量ゼロの粒子は, ともに**重力子** (graviton) と呼ばれる. 一方, 核子のベータ崩壊にともなって放出される質量ゼロと考えられているヘリシティ ±1/2 の粒子は (重力以外に) 空間反転について対称な相互作用を持たず, これらの粒子は異なる名前, つまり, ヘリシティ−1/2 は**ニュートリノ** (neutrino) , ヘリシティ+1/2 は**反ニュートリノ** (antineutrino) を付けられている.

質量ゼロの粒子のヘリシティはローレンツ不変であるが, 状態そのものはそうではない. 特に (2.5.42) のヘリシティに依存する位相因子 $\exp(i\sigma\theta)$ のせいで, 反対のヘリシティを持つ 1 粒子状態の線形結合で作られる状態は, ローレンツ変換のもとで, 異なる線形結合に変換される. たとえば, 一般の 1 光子状態は, 以下のように書ける.

$$\Psi_{p;\alpha} = \alpha_+ \Psi_{p,+1} \;+\; \alpha_- \Psi_{p,-1} \,.$$

ただし,

$$|\alpha_+|^2 \;+\; |\alpha_-|^2 = 1 \,.$$

一般的な場合は, $|\alpha_\pm|$ は両方ともゼロでなく互いに異なり, **楕円偏極** (elliptic polarization) と呼ばれる. **円偏極** (Circular polarization) は α_+ か α_- がゼロの場合で, **線偏極** (linear polarization) はその反対の極端な場合, $|\alpha_+| = |\alpha_-|$ だ. α_+ と α_- に共通の位相は, なんら物理的に重要でない. そのため, 線偏極では, この位相を調整して, $\alpha_- = \alpha_+^*$ とできる. しかし, 依然として相対的な位相は重要だ. 実際, $\alpha_- = \alpha_+^*$ の線形結合では, α_+ の位相は, $\mathbf{p}$ に垂直なある基準方向と偏極面との角度を意味する. (2.5.42) から, ローレンツ変換 $\Lambda^\mu{}_\nu$ のもとで, この角度は $\theta(\Lambda, p)$ だけ回転することがわかる. 面偏極した重力子も同様に

定義できる. このときは (2.5.42) から, ローレンツ変換Λ が偏極面を角度 $2\theta(\Lambda, p)$ だけ回転させることがわかる.

2.6 空間反転と時間反転

2.3 節でどんな斉次ローレンツ変換も固有順時 (つまり $\mathrm{Det}\Lambda = +1$ で$\Lambda^0{}_0 \geq +1$) か, または, 固有順時変換に $\mathcal{P}$ か $\mathcal{T}$ か $\mathcal{PT}$をかけたものだとわかった. ここで, $\mathcal{P}$ と $\mathcal{T}$ はそれぞれ以下の空間反転と時間反転だ.

$$\mathcal{P}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}^\mu{}_\nu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

かつては, ポアンカレ群の基本的な積の法則,

$$U(\bar{\Lambda}, \bar{a})\, U(\Lambda, a) = U(\bar{\Lambda}\Lambda, \bar{\Lambda}a + \bar{a})$$

は, Λ の $\bar{\Lambda}$ の両方かどちらかに $\mathcal{P}$ か $\mathcal{T}$ か $\mathcal{PT}$が含まれていても明らかに正しいと考えられた. 特に, $\mathcal{P}$ と $\mathcal{T}$に対応する演算子そのものが存在する, つまり,

$$\mathsf{P} \equiv U(\mathcal{P}, 0), \qquad \mathsf{T} \equiv U(\mathcal{T}, 0)$$

が任意の固有順時ローレンツ変換 $\Lambda^\mu{}_\nu$ と並進 a^μに対して

$$\mathsf{P}\, U(\Lambda, a)\, \mathsf{P}^{-1} = U(\mathcal{P}\Lambda\mathcal{P}^{-1}, \mathcal{P}a)\,, \tag{2.6.1}$$

$$\mathsf{T}\, U(\Lambda, a)\, \mathsf{T}^{-1} = U(\mathcal{T}\Lambda\mathcal{T}^{-1}, \mathcal{T}a) \tag{2.6.2}$$

を満たすと信じられていた. これらの変換則は, P か T が「保存する」ということをほぼ意味している.

1956–57 年に P についての変換則は, 原子核のベータ崩壊などをおこす弱い相互作用を無視したときにのみ近似的に正しいと理解されるようになった.[8] 時間反転はそれからしばらく生き延びたが, 1964 年に T について, これはやはり近似的にのみ正しいという間接的証拠が見つかった.[9] (3.3 節を見よ.) 以下では, (2.6.1) と (2.6.2) を満たす演算子 P と T が実際に存在するとして話を進めるが, これは近似でしかないことを心に留めておこう.

(2.6.1) と (2.6.2) を微小変換,

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \qquad a^\mu = \epsilon^\mu$$

に適用する. ここで, $\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}$ と ϵ_μ は共に微小だ. (2.4.3) を使い, (2.6.1) と (2.6.2) の$\omega_{\rho\sigma}$ と ϵ_ρ の係数を等しいとして, ポアンカレ生成子の P と T のもとでの変換性を以下のように得る.

$$\mathsf{P}\, i\, J^{\rho\sigma}\mathsf{P}^{-1} = i\,\mathcal{P}_\mu{}^\rho \mathcal{P}_\nu{}^\sigma J^{\mu\nu}\ , \tag{2.6.3}$$

$$\mathsf{P}\, i\, P^{\rho}\mathsf{P}^{-1} = i\,\mathcal{P}_\mu{}^\rho P^{\mu}\ , \tag{2.6.4}$$

$$\mathsf{T}\, i\, J^{\rho\sigma}\mathsf{T}^{-1} = i\,\mathcal{T}_\mu{}^\rho \mathcal{T}_\nu{}^\sigma J^{\mu\nu}\ , \tag{2.6.5}$$

$$\mathsf{T}\, i\, P^{\rho}\mathsf{T}^{-1} = i\,\mathcal{T}_\mu{}^\rho P^{\mu}\ . \tag{2.6.6}$$

これは (2.4.8) と (2.4.9) によく似ているが, いまはまだ P と T が線形ユニタリーか, 反線形反ユニタリーかは決めていないので, これらの式で両辺の i を打消してはいない.

これを決めるのは簡単だ. (2.6.4) で $\rho = 0$ として,

$$\mathsf{P}\, iH\, \mathsf{P}^{-1} = iH$$

となる. ここで, $H \equiv P^0$ はエネルギー演算子だ. もし, P が反線形反ユニタリーなら, i と反可換だ. したがって, $\mathsf{P}H\mathsf{P}^{-1} = -H$ となる. しかしこのときには, エネルギーが $E > 0$ のどんな状態 Ψ にも, エネル

ギーが $-E<0$ の別の状態 $\mathsf{P}^{-1}\Psi$ が付随することになる. 負のエネルギー (真空より低いエネルギー) の状態は存在しないので, 別の選択をしなければならない. つまり, P は線形ユニタリーで H と可換であり, 反可換ではない.

一方, (2.6.6) で $\rho=0$ とすると,

$$\mathsf{T}\,iH\,\mathsf{T}^{-1}=-iH$$

を得る. もし, T が線形ユニタリーだとすると, 単に, i を打消し, $\mathsf{T}H\mathsf{T}^{-1}=-H$を得るが, これはまた, エネルギー E の状態 Ψ にエネルギー $-E$ の別の状態 $\mathsf{T}^{-1}\Psi$ がともなうことになり, 破綻する. これを避けるためには, T を反線形反ユニタリーと選ばざるを得ない.

P は線形で T は反線形だと決めたので, (2.6.3)–(2.6.6) を 3 次元記法での生成子 (2.4.15)–(2.4.17) を使って書くのが便利だ.

$$\mathsf{P}\mathbf{J}\mathsf{P}^{-1}=+\mathbf{J}\,, \tag{2.6.7}$$

$$\mathsf{P}\mathbf{K}\mathsf{P}^{-1}=-\mathbf{K}\,, \tag{2.6.8}$$

$$\mathsf{P}\mathbf{P}\mathsf{P}^{-1}=-\mathbf{P}\,, \tag{2.6.9}$$

$$\mathsf{T}\mathbf{J}\mathsf{T}^{-1}=-\mathbf{J}\,, \tag{2.6.10}$$

$$\mathsf{T}\mathbf{K}\mathsf{T}^{-1}=+\mathbf{K}\,, \tag{2.6.11}$$

$$\mathsf{T}\mathbf{P}\mathsf{T}^{-1}=-\mathbf{P}\,. \tag{2.6.12}$$

そして, 前に示したように,

$$\mathsf{P}H\mathsf{P}^{-1}=\mathsf{T}H\mathsf{T}^{-1}=H \tag{2.6.13}$$

が成立する. P が $\mathbf{J}$ の符号を保つのは物理的に自然だ. なぜなら, 軌道部分はベクトル積 $\mathbf{r}\times\mathbf{p}$ であり, これらの二つのベクトルは共に空間の座標反転のもとで符号を変えるからだ. 一方, T は $\mathbf{J}$ を反転する. これは時間反転の後では, 観測者は全ての物体が反対方向に回っている

のを見るからだ．ところで, (2.6.10) は角運動量の交換関係 $\mathbf{J}\times\mathbf{J}=i\mathbf{J}$ と矛盾しない．これは, T は $\mathbf{J}$ のみならず, i の符号をも変えるからだ．読者は (2.6.7)–(2.6.13) が (2.4.18)–(2.4.24) の交換関係全てと矛盾しないことを確かめられたい．

つぎに P と T が 1 粒子状態にどのように作用するかを調べる．

P: $M>0$

1 粒子状態 $\Psi_{k,\sigma}$ は $\mathbf{P},H,J_3$ がそれぞれ固有値 $0,M,\sigma$ を持つ状態とする．(2.6.7), (2.6.9), (2.6.13) から, $\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma}$ も同様だから, (縮退が無いとして) これらの状態は高々位相だけしか違わない．

$$\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma}=\eta_\sigma\Psi_{k,\sigma}\,.$$

ここで, 位相因子 ($|\eta|=1$) はスピンσに依存するかどうかはわからない．η_σ が σ に依存しないことを示すには, (2.5.8), (2.5.20), (2.5.21) から, j を粒子のスピンとして,

$$(J_1\pm i\,J_2)\Psi_{k,\sigma}=\sqrt{(j\mp\sigma)(j\pm\sigma+1)}\;\Psi_{k,\sigma\pm1} \tag{2.6.14}$$

であることを使う．両辺に P を施すと以下を得る．

$$\eta_\sigma=\eta_{\sigma\pm1}\,.$$

したがって, η_σ は実際に σに依存しないことがわかる．そのため, 以下のように書ける．

$$\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma}=\eta\Psi_{k,\sigma}\,. \tag{2.6.15}$$

ここで, η は固有パリティ (intrinsic parity) と呼ばれる位相であり, P が作用する粒子の種類のみに依る．

ゼロでない運動量を持つ状態を得るには,「ブースト」(2.5.24) に対応するユニタリー演算子, $U(L(p))$ を施す．

$$\Psi_{p,\sigma}=\sqrt{M/p^0}\;U\left(L(p)\right)\Psi_{k,\sigma}\,.$$

以下の式が成立することに留意する.

$$\mathcal{P}L(p)\mathcal{P}^{-1} = L(\mathcal{P}p) \quad ,$$
$$\mathcal{P}p = \left(-\mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}\right) \ .$$

したがって, (2.6.1) と (2.6.15) を使って,

$$\mathsf{P}\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{M/p^0}\, U(L(\mathcal{P}p))\eta\Psi_{k,\sigma}$$

を得る. これは書き換えると,

$$\mathsf{P}\Psi_{p,\sigma} = \eta\Psi_{\mathcal{P}p,\sigma} \tag{2.6.16}$$

となる.

T: $M > 0$

(2.6.10), (2.6.12), (2.6.13) から, T の運動量ゼロの 1 粒子状態 $\Psi_{k,\sigma}$ への影響は, 以下であることがわかる.

$$\mathbf{P}(\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma}) = 0 \, ,$$
$$H(\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma}) = M(\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma}) \, ,$$
$$J_3(\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma}) = -\sigma(\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma}) \, .$$

したがって,

$$\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma} = \zeta_\sigma \Psi_{k,-\sigma}$$

となる. ここで, ζ_σ は位相因子だ. 演算子 T を (2.6.14) に適用して, T が **J** および i と反可換であることを使うと, 以下を得る.

$$(-J_1 \pm i\,J_2)\zeta_\sigma\Psi_{k,-\sigma} = \sqrt{(j \mp \sigma)(j \pm \sigma + 1)}\zeta_{\sigma\pm1}\,\Psi_{k,-\sigma\mp1} \, .$$

(2.6.14) をもう一度左辺に適用すると, 平方根の因子が打消しあって,

$$-\zeta_\sigma = \zeta_{\sigma\pm1}$$

を得る. 粒子の種類にのみ依る別の位相因子ζ を用いて, 解を $\zeta_\sigma = \zeta(-)^{j-\sigma}$と書けるから,

$$\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma} = \zeta(-)^{j-\sigma}\Psi_{k,-\sigma} \tag{2.6.17}$$

となる. しかし, 「固有パリティ」 ηと異なり, 時間反転の位相 ζ は何等物理的に重要ではない. これは 1 粒子状態の位相を変えて,

$$\Psi_{k,\sigma} \to \Psi'_{k,\sigma} = \zeta^{1/2}\Psi_{k,\sigma}$$

と再定義し, 変換則から位相 ζ を消すことができるからだ.

$$\mathsf{T}\Psi'_{k,\sigma} = \zeta^{*1/2}\mathsf{T}\Psi_{k,\sigma} = \zeta^{*1/2}\zeta(-)^{j-\sigma}\Psi_{k,-\sigma} = (-)^{j-\sigma}\Psi'_{k,-\sigma}\,.$$

以下では, (2.6.17) に任意の位相 ζ を置いておく. これは単に 1 粒子状態の位相を選べるようにしておくためだが, この位相が実際には重要ではないということを忘れてはならない.

ゼロでない運動量を扱うために, 「ブースト」 (2.5.24) を再び施す.

$$\mathcal{T}L(p)\mathcal{T}^{-1} = L(\mathcal{P}p)\,,$$

$$\mathcal{P}p = \left(-\mathbf{p}, \sqrt{\mathbf{p}^{\,2} + M^2}\right)$$

に留意する. (つまり, 時間成分の添字を奇数個持つ $L^\mu{}_\nu$ の成分の符号を全て変えることは, 空間成分の添字を奇数個持つ成分の符号を変えることと同等だ.) これを使うと, (2.6.2) と (2.5.5) から以下を得る.

$$\mathsf{T}\Psi_{p,\sigma} = \zeta(-)^{j-\sigma}\Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma}\,. \tag{2.6.18}$$

P: $\boldsymbol{M = 0}$

状態 $\Psi_{k,\sigma}$ は, 固有値 $k^\mu = (0, 0, \kappa, \kappa)$ を持つ P^μ の固有ベクトルであり, また, 固有値 σ を持つ J_3 の固有ベクトルだが, この状態にパリティ演算子 P が作用すると, 4 元運動量が $(\mathcal{P}k)^\mu = (0, 0, -\kappa, \kappa)$ で J_3

が σ の状態ができる. このため, ヘリシティ(スピンの運動方向の成分) σ の状態はヘリシティ $-\sigma$ の状態になる. 前に述べたように, これから, 空間反転対称性が成立するには, ゼロでないヘリシティを持つどんな種類の質量ゼロの粒子もその反対のヘリシティを持つ粒子をともなわなければならない. P は基準運動量を不変に保たないので, 演算子 $U(R_2^{-1})\mathsf{P}$ を考えるほうが便利だ. ここで, R_2は k を $\mathcal{P}k$ に変換する回転で, 便宜上, 2 軸周りの -180^o 回転とする.

$$U(R_2) = \exp(-i\pi J_2)\,. \tag{2.6.19}$$

$U(R_2^{-1}$) は J_3の符号を反転するから,

$$U(R_2^{-1})\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma} = \eta_\sigma \Psi_{k,-\sigma} \tag{2.6.20}$$

となる. ここで, η_σ は位相因子だ. さて, $R_2^{-1}\mathcal{P}$ はローレンツ「ブースト」(2.5.45) と可換だ. そして, $\mathcal{P}$ は 3 軸を $\mathbf{p}$ へ回す回転 $R(\hat{p})$ と可換だ. したがって, (2.5.5) に P を施すと, 一般的な 4 元運動量 p^μ に対して以下を得る.

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\Psi_{p,\sigma} &= \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}\, U\left(R(\hat{p})R_2 B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)\right) U(R_2^{-1})\mathsf{P}\Psi_{k,\sigma} \\ &= \sqrt{\frac{\kappa}{p^0}}\,\eta_\sigma\, U\left(R(\hat{p})R_2\, B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)\right) \Psi_{k,-\sigma}\,.\end{aligned}$$

$R(\hat{\mathbf{p}})R_2$ は 3 軸を $-\hat{\mathbf{p}}$ の方向へ回す回転だ. しかし, $U(R(\hat{\mathbf{p}})R_2)$ は $U(R(-\hat{\mathbf{p}})$) と完全に同じものではない. (2.5.47) によれば,

$$U(R(-\hat{\mathbf{p}})) = \exp\Big(-i(\phi \pm \pi)J_3\Big)\ \exp\Big(-i(\pi - \theta)J_2\Big)$$

だ. ここで, 方位角が 0 から 2πの間になるように, $0 \le \phi < \pi$ か $\pi \le \phi < 2\pi$ に応じて, $\phi + \pi$ と $\phi - \pi$ に選んだ. すると, 以下を得る.

$$U^{-1}\Big(R(-\hat{\mathbf{p}})\Big)U\Big(R(\hat{\mathbf{p}})R_2\Big) = \exp\Big(i(\pi - \theta)J_2\Big)$$

$$\times \exp\Big(i(\phi \pm \pi)J_3\Big) \exp(-i\phi J_3) \exp(-i\theta J_2) \exp(i\pi J_2)$$
$$= \exp\Big(i(\pi - \theta)J_2\Big) \exp(\pm i\pi J_3) \exp\Big(i(\pi - \theta)J_2\Big) .$$

しかし, 3 軸周りの±180° の回転は J_2の符号を変えるから,

$$U\Big(R(\hat{\mathbf{p}})R_2\Big) = U\Big(R(-\hat{\mathbf{p}})\Big) \exp(\pm i\pi J_3) \tag{2.6.21}$$

となる. また, $R(-\hat{\mathbf{p}})B(|\mathbf{p}|/k)$ は単に $\mathcal{P}p = (-\mathbf{p}, p^0)$ の方向の基準ブースト $L(\mathcal{P}p)$ だ. したがって, 最終的に以下を得る.

$$\mathsf{P}\Psi_{p,\sigma} = \eta_\sigma \exp(\mp i\pi\sigma)\Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma} . \tag{2.6.22}$$

ここで, 位相は $\mathbf{p}$ の 2 軸成分が正か負かによってそれぞれ$-\pi\sigma$ か $+\pi\sigma$ になる. この, 半整数のスピンの質量ゼロ粒子にパリティが作用するときの奇妙な符号の変化は, (2.5.47) で任意の運動量の質量ゼロの粒子状態を定義するのに用いた回転のためだ. 回転群は単連結ではないので, この種の非連続性は避けがたい.

T: $M = 0$

状態$\Psi_{k,\sigma}$では P^μ と J_3 が値 $k^\mu = (0, 0, \kappa, \kappa)$ と σ を持つ. この状態に時間反転の演算子 T が作用すると, P^μ と J_3 が $(\mathcal{P}k)^\mu = (0, 0, -\kappa, \kappa)$ と $-\sigma$ の値を持つ状態が生じる. したがって, T はヘリシティ $\mathbf{J}\cdot\hat{k}$ を変えず, それだけではあるヘリシティ σ の質量ゼロの粒子とヘリシティ $-\sigma$ の粒子を何も関連づけない. T は P と同様に, 基準運動量 k を不変に保たないから, 生成子 $U(R_2^{-1})\mathsf{T}$ を考えるのが便利だ. ここで, R_2 は (2.6.19) の回転で k を $\mathcal{P}k$ へ回す. これは J_3と可換だから,

$$U(R_2^{-1})\,\mathsf{T}\,\Psi_{k,\sigma} = \zeta_\sigma \Psi_{k,\sigma} \tag{2.6.23}$$

となる. ここで, ζ_σ は位相だ. $R_2^{-1}T$ はブースト (2.5.45) と可換で, T は回転 $R(\hat{p})$ と可換だから, T を状態 (2.5.5) に施すと,

$$\mathsf{T}\Psi_{p,\sigma} = \sqrt{\frac{\kappa}{p_0}}\, U\left[R(\hat{p})R_2\; B\left(\frac{|\mathbf{p}|}{\kappa}\right)\right] \zeta_\sigma \Psi_{k,\sigma} \tag{2.6.24}$$

となる. (2.6.21) を使うと, 最終的にこれは,

$$\mathsf{T}\Psi_{p,\sigma} = \zeta_\sigma \exp(\pm i\pi\sigma)\Psi_{\mathcal{P}p,\sigma} \tag{2.6.25}$$

となる. 以前と同じように, 上と下の符号は, それぞれ $\mathbf{p}$ の 2 軸成分が正か負のときだ.

* * *

時間反転の演算子の 2 乗 T^2が質量がゼロでない粒子状態と質量ゼロの粒子状態に非常に簡単に作用するのは興味深い. (2.6.18) と, T が反ユニタリーであることを使うと, 質量がゼロでない 1 粒子状態では,

$$\mathsf{T}^2\Psi_{p,\sigma} = \mathsf{T}\zeta(-)^{j-\sigma}\Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma} = \zeta^*(-)^{j-\sigma}\zeta(-)^{j+\sigma}\Psi_{p,\sigma}$$

となる, つまり, 書き換えると,

$$\mathsf{T}^2\Psi_{p,\sigma} = (-)^{2j}\Psi_{p,\sigma} \tag{2.6.26}$$

となることがわかる. 質量のない粒子状態についても同じだ. もし $\mathbf{p}$ の 2 軸成分が正なら, $\mathcal{P}\mathbf{p}$ の 2 軸成分は負であり, また, その逆も成立する. したがって, (2.6.25) から, 以下が導ける.

$$\begin{aligned}\mathsf{T}^2\Psi_{p,\sigma} &= \mathsf{T}\zeta_\sigma \exp(\pm i\pi\sigma)\Psi_{\mathcal{P}p,\sigma} = \zeta_\sigma^* \exp(\mp i\pi\sigma)\zeta_\sigma \exp(\mp i\pi\sigma)\Psi_{p,\sigma}\\ &= \exp(\mp 2i\pi\sigma)\Psi_{p,\sigma}\,.\end{aligned}$$

σ が整数か, 反整数である限り, これは以下のように書換えれる.

$$\mathsf{T}^2\Psi_{p,\sigma} = (-)^{2|\sigma|}\Psi_{p,\sigma}\,. \tag{2.6.27}$$

質量ゼロの粒子の「スピン」とは, 通常ヘリシティの絶対値を意味する. したがって, (2.6.27) は (2.6.26) と同じだ.

これは興味深い結論につながる. T^2 が相互作用しない質量ゼロか質量がゼロでない粒子の系の任意の状態 Ψ に作用するとき, 1 粒子に

つき, それぞれ, 因子 $(-)^{2j}$ か $(-)^{2|\sigma|}$ が出る. したがって, もし状態に半整数のスピンかヘリシティを持つ粒子が奇数個あれば, (整数のスピンかヘリシティを持つ粒子は何個あってよい) 全体の符号変化は,

$$\mathsf{T}^2\Psi = -\Psi \tag{2.6.28}$$

となる. もし, いろいろな相互作用の「スイッチを入れ」ても, この結果は, それらの相互作用がたとえ回転不変でなくても時間反転のもとで不変である限り, 変わらない. (たとえば, この議論は系が任意の静的な重力場や電場のもとにあっても適用できる.) さて, Ψ がハミルトニアンの固有状態であるとする. T はハミルトニアンと可換だから, $\mathsf{T}\Psi$ もまたハミルトニアンの固有状態だ. これは同じ状態だろうか? もしそうなら, $\mathsf{T}\Psi$ は Ψ と位相だけしか違わないことになる.

$$\mathsf{T}\Psi = \zeta\Psi\,.$$

しかし, そのときは,

$$\mathsf{T}^2\Psi = \mathsf{T}(\zeta\Psi) = \zeta^*\mathsf{T}\Psi = |\zeta|^2\Psi = \Psi$$

となって, (2.6.28) と矛盾する. こうして, (2.6.28) を満たすどのようなエネルギーの固有状態も同じエネルギーの他の固有状態と縮退していることがわかる. これは, 「クラマーの縮退」[10] と呼ばれている. もちろん, この結論はもし系が回転不変な環境にあれば自明だ. なぜなら, この系のどのような状態の全角運動量 j も半整数であり, $2j+1=2,4,\cdots$ 個の縮退した状態があるからだ. 驚くべき結果は, 回転不変性が静電場などの外場の摂動によって破られても, その外場が最低限, T のもとで不変な限り, 2 重縮退が残ることだ. 特に, もしその粒子が電気, または重力双極子モーメントを持っていれば, $2j+1$ 個のスピン状態の間の縮退は完全に電場か重力場のもとで解ける. したがって, そのような双極子モーメントは時間反転不変性で禁止される.

議論を完全にするために, P と T は同じ質量の粒子の多重項にはより複雑に作用しうることを述べておこう. これは, この章の補遺 C で考察する. この場合で, 物理的に意味のある例は知られていない.

2.7 射影表現*

ここで, 2.2 節で述べた, 対称性の群が物理的状態の上で射影表現になっている, つまり, 対称群の元 T, $\bar{T}$, などが物理的ヒルベルト空間上で, ユニタリー演算子 $U(T), U(\bar{T})$ 等で表されていて, 次の結合則を満たしている場合を考える.

$$U(T)U(\bar{T}) = \exp\Big(i\phi(T,\bar{T})\Big)U(T\bar{T})\,. \tag{2.7.1}$$

ここで, ϕ は実の位相だ. (ここで, 異なる対称性演算子を区別するために棒線を使っている.) (2.7.1) の位相 ϕ が満たさなければならない基本的な条件は, 結合則,

$$U(T_3)(U(T_2)U(T_1)) = (U(T_3)U(T_2))U(T_1)$$

からくるもので, 以下となる.

$$\phi(T_2,T_1) + \phi(T_3,T_2T_1) = \phi(T_3,T_2) + \phi(T_3T_2,T_1)\,. \tag{2.7.2}$$

もちろん, 次の形をしたどんな位相も (2.7.2) を満たす.

$$\phi(T,\bar{T}) = \alpha(T\bar{T}) - \alpha(T) - \alpha(\bar{T})\,. \tag{2.7.3}$$

しかし, そのような位相を持つ射影表現は, 以下のように $U(T)$ の置換えをすれば通常の表現になる.

$$\tilde{U}(T) \equiv U(T)\exp\Big(i\alpha(T)\Big)\,.$$

*この節はこの本の議論の本筋からは多少外れているので, 最初読むときには飛ばしてもよい.

実際, こうすれば,

$$\tilde{U}(T)\tilde{U}(\bar{T}) = \tilde{U}(T\bar{T})$$

となる. (2.7.2) を満たし, (2.7.3) の形をした $\Delta\phi(T,\bar{T})$ だけしか互いに異ならない関数 $\phi(T,\bar{T})$ の集合は, 「2 コサイクル」(two-cocycle) と呼ばれる. 自明なコサイクルは関数 $\phi = 0$ を含み, したがって, (2.7.3) の形の関数のみでできている. これらは $U(T)$ の再定義で吸収できるものだ. ここでは, 対称群が自明でない 2 コサイクルを持てるかどうかに興味がある. つまり, それが, 物理的なヒルベルト空間上で, $\phi(T,\bar{T})$ が上のように消すことはできないという意味で, 固有に射影的であるのかどうかという点だ.

この問題に答えるために, 最初に (2.7.1) の位相 ϕ が微小変換の生成子の交換関係に与える影響を調べる. $\bar{T}$ か T が恒等変換ならば, 位相 ϕ は明らかに消える.

$$\phi(T,1) = \phi(1,\bar{T}) = 0\ . \tag{2.7.4}$$

もし, T と $\bar{T}$ が共に恒等変換の近傍ならば, 位相は小さいはずだ. 座標 θ^a を使って (2.2 節と同様に) 群の元を $T(0) \equiv 1$ となるようにパラメータ化すると, (2.7.4) から$\phi(T(\theta),T(\bar{\theta}))$ の $\theta = \bar{\theta} = 0$ の周りの展開が$\theta\bar{\theta}$の次数から始まることがわかる.

$$\phi\Big(T(\theta),T(\bar{\theta})\Big) = f_{ab}\theta^a\bar{\theta}^b + \cdots\ . \tag{2.7.5}$$

ここで, f_{ab} は実の数係数だ. この展開を (2.7.1) の巾級数展開に代入し, (2.2.22) を導いた際と同じ過程を繰り返すと, 以下を得る.

$$[t_b, t_c] = iC^a{}_{bc}t_a + iC_{bc}1\ \ . \tag{2.7.6}$$

ここで, C_{bc} は以下の反対称係数だ.

$$C_{bc} = -f_{bc} + f_{cb}\ . \tag{2.7.7}$$

交換関係の右辺に単位元に比例する項 (通常**中心電荷** (central charge) と呼ばれる) が現れることは, 群の射影表現に位相があることのリー代数への反映だ.

係数 C_{bc} と $C^a{}_{bc}$ はヤコビ恒等式から導かれるある重要な拘束条件にしたがう. (2.7.6) と t_d の交換子をとり, b, c, d を c, d, b と d, b, c で置換えて得られる式二つを加えると, 左辺の 2 重交換子は恒等的に消えるので,

$$C^a{}_{bc}C^e{}_{ad} + C^a{}_{cd}C^e{}_{ab} + C^a{}_{db}C^e{}_{ac} = 0 \tag{2.7.8}$$

と,

$$C^a{}_{bc}C_{ad} + C^a{}_{cd}C_{ab} + C^a{}_{db}C_{ac} = 0 \tag{2.7.9}$$

を得る. (2.7.9) は常に C_{ab}のゼロでない自明な解を持っている.

$$C_{ab} = C^e{}_{ab}\phi_e \ . \tag{2.7.10}$$

ここで, ϕ_e は任意の実定数だ. この解では, (2.7.6) から中心電荷を以下の生成子の再定義で消すことができる.

$$t_a \to \tilde{t}_a \equiv t_a + \phi_a \quad . \tag{2.7.11}$$

こうすると, 新しい生成子は中心電荷のない交換関係を満たす.

$$\left[\tilde{t}_b, \tilde{t}_c\right] = iC^a{}_{bc}\tilde{t}_a \quad . \tag{2.7.12}$$

リー代数は (2.7.9) の解として (2.7.10) 以外のものを持つ場合も持たない場合もある.

ここで, 固有の射影表現があるかどうかを決める鍵となる定理を述べる. 任意の群のどんな表現 $U(T)$ の位相も, もし以下の二つの条件が満たされれば (2.7.1) で$\phi = 0$ と選べる.

(a) この群の生成子を ((2.7.11) でしたように) 再定義して, リー代数から全ての中心電荷を消去できる.

(b) 群が単連結である, つまり, どんな二つの群の元も, 群の内部を通る経路で結ばれていて, そのような経路は全て互いに連続的に変形できる. (同等な言い換えをすると, ある群の元から出発して元に戻るどんな経路も連続的に 1 点に縮小できる.)

この定理はこの章の補遺 B で証明する. そこではまた, 単連結ではない群についても述べる. この定理によれば, 固有射影表現が可能になるには, ちょうど二つの (同時にでもよいが) やりかたがある. 一つは代数的なもので, 群が単位元の近傍でも射影的に表現される場合で, もう一つは, トポロジー的で, 群が単連結ではなく, 1 から T に行き T から $\bar{T}$ に行く経路が 1 から $T\bar{T}$ へ行く他の経路に連続的に変形できないこともある場合だ. 後者の場合は, U 演算子を定義するのに使った (2.7.1) の位相 ϕ は様々な群の元と原点を結ぶ基準となる経路の選び方による.

これらの可能性を非斉次ローレンツ群の特殊な場合について順に調べる.

(A) 代数

中心電荷のある非斉次ローレンツ群の生成子の交換関係は, (2.4.12)–(2.4.14) の代りに以下で与えられる.

$$i[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} J^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} J^{\rho\mu} + C^{\rho\sigma,\mu\nu} , \tag{2.7.13}$$

$$i[P^{\mu}, J^{\rho\sigma}] = \eta^{\mu\rho} P^{\sigma} - \eta^{\mu\sigma} P^{\rho} + C^{\rho\sigma,\mu} , \tag{2.7.14}$$

$$i[J^{\mu\nu}, P^{\rho}] = \eta^{\nu\rho} P^{\mu} - \eta^{\mu\rho} P^{\nu} + C^{\rho,\mu\nu} , \tag{2.7.15}$$

$$i[P^{\mu}, P^{\rho}] = C^{\rho,\mu} . \tag{2.7.16}$$

C も反対称性を満たすことがわかる.

$$C^{\rho\sigma,\mu\nu} = -C^{\mu\nu,\rho\sigma} , \tag{2.7.17}$$

$$C^{\rho\sigma,\mu} = -C^{\mu,\rho\sigma}\,, \tag{2.7.18}$$

$$C^{\rho,\mu} = -C^{\mu,\rho}\,. \tag{2.7.19}$$

ここで, これらの定数全ては更にある代数的性質を持ち, そのために, $J^{\mu\nu}$ と P^{μ} を定数だけずらすことによって取り除けることを示す. (これは演算子 $U(\Lambda, a)$ の位相の再定義に相当する.) これらの性質を導くには以下のヤコビ恒等式を使う.

$$\Big[J^{\mu\nu},[P^\rho,P^\sigma]\Big] + \Big[P^\sigma,[J^{\mu\nu},P^\rho]\Big] + \Big[P^\rho,[P^\sigma,J^{\mu\nu}]\Big] = 0, \tag{2.7.20}$$

$$\big[J^{\lambda\eta},[J^{\mu\nu},P^\rho]\big] + \big[P^\rho,[J^{\lambda\eta},J^{\mu\nu}]\big] + \big[J^{\mu\nu},[P^\rho,J^{\lambda\eta}]\big] = 0, \tag{2.7.21}$$

$$\big[J^{\lambda\eta},[J^{\mu\nu},J^{\rho\sigma}]\big] + \big[J^{\rho\sigma},[J^{\lambda\eta},J^{\mu\nu}]\big] + \big[J^{\mu\nu},[J^{\rho\sigma},J^{\lambda\eta}]\big] = 0\,. \tag{2.7.22}$$

(三つの Pを含むヤコビ恒等式は自動的に満たされていて, なんら新しい情報をもたらさない.) (2.7.13)–(2.7.16) を (2.7.20)–(2.7.22) に使うと, Cに対する以下の代数的な条件が得られる.

$$0 = \eta^{\nu\rho}C^{\mu,\sigma} - \eta^{\mu\rho}C^{\nu,\sigma} - \eta^{\nu\sigma}C^{\mu,\rho} + \eta^{\mu\sigma}C^{\nu,\rho}\,, \tag{2.7.23}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & \eta^{\nu\rho}C^{\mu,\lambda\eta} - \eta^{\mu\rho}C^{\nu,\lambda\eta} - \eta^{\mu\eta}C^{\rho,\lambda\nu} + \eta^{\lambda\mu}C^{\rho,\eta\nu} \\ & + \eta^{\lambda\nu}C^{\rho,\mu\eta} - \eta^{\eta\nu}C^{\rho,\mu\lambda} + \eta^{\rho\lambda}C^{\eta,\mu\nu} - \eta^{\rho\eta}C^{\lambda,\mu\nu}\,, \end{aligned} \tag{2.7.24}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & \eta^{\nu\rho}C^{\mu\sigma,\lambda\eta} - \eta^{\mu\rho}C^{\nu\sigma,\lambda\eta} - \eta^{\sigma\mu}C^{\rho\nu,\lambda\eta} + \eta^{\sigma\nu}C^{\rho\mu,\lambda\eta} \\ & + \eta^{\eta\mu}C^{\lambda\nu,\rho\sigma} - \eta^{\lambda\mu}C^{\eta\nu,\rho\sigma} - \eta^{\nu\lambda}C^{\mu\eta,\rho\sigma} + \eta^{\nu\eta}C^{\mu\lambda,\rho\sigma} \\ & + \eta^{\sigma\lambda}C^{\rho\eta,\mu\nu} - \eta^{\rho\lambda}C^{\sigma\eta,\mu\nu} - \eta^{\eta\rho}C^{\lambda\sigma,\mu\nu} + \eta^{\eta\sigma}C^{\lambda\rho,\mu\nu}\,. \end{aligned} \tag{2.7.25}$$

(2.7.23) を $\eta_{\nu\rho}$ と縮約すると,

$$C^{\mu,\sigma} = 0 \tag{2.7.26}$$

を得る. 一方, 定数 $C^{\mu,\lambda\eta}$ と $C^{\rho\sigma,\mu\nu}$ は必ずしもゼロではないが, それらの代数的構造は充分単純で, それぞれ, P^{μ} と $J^{\mu\nu}$の定義をずらして消せる. (2.7.24) を $\eta_{\nu\rho}$ と縮約すると以下を得る.

$$C^{\mu,\lambda\eta} = \eta^{\mu\eta}C^{\lambda} - \eta^{\mu\lambda}C^{\eta}\,, \tag{2.7.27}$$

$$C^{\lambda} \equiv \frac{1}{3}\,\eta_{\rho\nu} C^{\rho,\lambda\nu} \; . \tag{2.7.28}$$

また, (2.7.25) を $\eta_{\nu\rho}$ と縮約して,

$$C^{\mu\sigma,\lambda\eta} = \eta^{\eta\mu} C^{\lambda\sigma} - \eta^{\lambda\mu} C^{\eta\sigma} + \eta^{\sigma\lambda} C^{\eta\mu} - \eta^{\eta\sigma} C^{\lambda\mu} \; , \tag{2.7.29}$$

$$C^{\lambda\sigma} \equiv \frac{1}{2}\,\eta_{\nu\rho} C^{\lambda\nu,\sigma\rho} \tag{2.7.30}$$

を得る. (これらの式は自動的に (2.7.24) と (2.7.25) を満たす. したがって, ヤコビ恒等式からはこれ以上有益な情報は得られない.) もし, 係数 C がゼロでないなら, 新しい生成子を以下のように定義してこれらの係数を消すことができる.

$$\tilde{P}^{\mu} \equiv P^{\mu} + C^{\mu} \; , \tag{2.7.31}$$

$$\tilde{J}^{\mu\sigma} \equiv J^{\mu\sigma} + C^{\mu\sigma} \; . \tag{2.7.32}$$

この結果, 交換関係は通常の表現のときと同じになる.

$$i[\tilde{J}^{\mu\nu}, \tilde{J}^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho} \tilde{J}^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho} \tilde{J}^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu} \tilde{J}^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu} \tilde{J}^{\rho\mu} \; , \tag{2.7.33}$$

$$i[\tilde{J}^{\mu\nu}, \tilde{P}^{\rho}] = \eta^{\nu\rho} \tilde{P}^{\mu} - \eta^{\nu\rho} \tilde{P}^{\nu} \; , \tag{2.7.34}$$

$$i[\tilde{P}^{\mu}, \tilde{P}^{\rho}] = 0 \; . \tag{2.7.35}$$

交換関係は今後常に (2.7.33)-(2.7.35) ととることにしてチルダ (˜) を落とすことにする.

ところで, $J^{\mu\nu}$ の代数に中心電荷が無いことはこの代数が「半単純」であることからすぐに結論できる. (半単純リー代数とは, 「不変可換」部分代数, つまりお互いに可換な生成子の集合で, 他の生成子との交換子が必ずこの集合に属するもの, が無いリー代数をいう.) 一般的な定理[11]によれば, 半単純リー代数のどのような中心電荷も (2.7.32) のような生成子の再定義で取り除ける. 一方, $J^{\mu\nu}$ と P^{μ} によって張られる全ポアンカレ代数は半単純ではない. (P^{μ} が不変可換部分代数をなす.) したがって, その中心電荷も消せることを証明するにはそれな

りの議論が必要だ. 実際, 2.4 節で論じた非半単純ガリレイ代数は中心電荷, 質量 M を持つ.

非斉次ローレンツ群は固有射影表現を排除するための二つの条件のうち第一の条件を満たすことをみた. では第二の条件はどうだろうか?

(B) トポロジー

非斉次ローレンツ群のトポロジーを調べるのには, 非斉次ローレンツ変換を 2×2 複素行列で表わすのが便利だ. 任意の実 4 元ベクトル V^μ から, エルミート 2×2 行列が作れる.

$$v \equiv V^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} V^0 + V^3 & V^1 - iV^2 \\ V^1 + iV^2 & V^0 - V^3 \end{pmatrix} . \qquad (2.7.36)$$

ここで, σ_μ は $\sigma_0 \equiv 1$ と通常のパウリ行列からなる. 逆に任意の 2×2 エルミート行列は上の形に書けて, 実 4 元ベクトル V^μが定義できる.

エルミート性は, 任意の複素 2×2 行列 λ を使った以下の変換で保たれる.

$$v \to \lambda v \lambda^\dagger . \qquad (2.7.37)$$

さらに, 4 元ベクトルの不変 2 乗積は,

$$V_\mu V^\mu = (V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2 - (V^0)^2 = -\mathrm{Det}\ v \qquad (2.7.38)$$

と書けるが, この行列式は変換 (2.7.37) が,

$$|\mathrm{Det}\ \lambda| = 1 \qquad (2.7.39)$$

であれば不変だ. (2.7.39) を満たす複素 2×2 行列 λ は (2.7.38) を不変にする実線形変換 V^μ, つまり斉次ローレンツ変換 $\Lambda(\lambda)$ を定義する.

$$\lambda V^\mu \sigma_\mu \lambda^\dagger = (\Lambda^\mu{}_\nu(\lambda) V^\nu)\sigma_\mu . \qquad (2.7.40)$$

さらに, そのような二つの行列 λ と $\bar{\lambda}$ について,

$$(\lambda\bar{\lambda})V^\mu\sigma_\mu(\lambda\bar{\lambda})^\dagger = \lambda(\bar{\lambda}V^\mu\sigma_\mu\bar{\lambda}^\dagger)\lambda^\dagger$$
$$= \lambda\Lambda^\mu{}_\nu(\bar{\lambda})V^\nu\sigma_\mu\lambda^\dagger = \Lambda^\mu{}_\rho(\lambda)\Lambda^\rho{}_\nu(\bar{\lambda})V^\nu\sigma_\mu$$

となるから, 以下が成立する.

$$\Lambda(\lambda\bar{\lambda}) = \Lambda(\lambda)\Lambda(\bar{\lambda})\,. \tag{2.7.41}$$

ところで, 二つの λ が全体の位相だけ異なっているとき, (2.7.37) で v には同じ影響を及ぼすから, 同じローレンツ変換に対応する. したがって, λ の位相を,

$$\mathrm{Det}\,\lambda = 1 \tag{2.7.42}$$

となるように選ぶ. これは (2.7.41) と矛盾しない. 行列式が 1 の複素 2×2 行列は $SL(2,C)$ として知られる群をなす. (SL は「特殊線形」(special linear) を意味する. 「特殊」とは, 行列式が 1 のことを意味する. また, C は「複素」(complex) を意味する.) 群の元は $4-1=3$ 個の複素パラメータ, つまり, 6 個の実パラメータに依存する. これはローレンツ群と同じ数だ. しかし, $SL(2,C)$ はローレンツ群と同一ではない. もし, λ が $SL(2,C)$ の行列ならば, $-\lambda$も $SL(2,C)$ の行列だが, λ と$-\lambda$ は (2.7.37) で同じローレンツ変換に相当する. 実際, 行列,

$$\lambda(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/2} \end{pmatrix}$$

は 3 軸周りの角度 θ の回転をおこすローレンツ変換$\Lambda(\lambda(\theta))$ に対応することが簡単にわかるので, $\lambda=-1$ は角度 2π の回転を引き起こす. したがって, ローレンツ群は $SL(2,C)$ と同一ではなく, むしろ, $SL(2,C)/Z_2$, すなわち行列式が 1 の複素 2×2 行列で λ と $-\lambda$ を同一視した群に等しい.**

**群 Z_2 は単に元 $+1$ と -1 からなる. 一般に, G の不変部分群 H を使って G/Hと書くと, 群 G で元 g と gh がもし $g\in G$ で $h\in H$ なら同一であるとしたものを意味する. 部分群 Z_2 は, その元が $SL(2,C)$ の全ての元と可換なので, 明らかに不変だ.

さて, ローレンツ群のトポロジーは何だろうか? 極座標分解定理[12]により, どんな特異でない行列 λ も以下の形に書ける.

$$\lambda = u\, e^h\ .$$

ここで, u はユニタリーで h はエルミートだ.

$$u^\dagger u = 1\ , \qquad\qquad h^\dagger = h\ .$$

Det u は位相因子であり, Det exp h = exp Tr h は実で正だから, (2.7.42) の条件は以下の二つを共に要求する.

$$\mathrm{Det}\ u = 1\ ,$$

$$\mathrm{Tr}\ h = 0\ .$$

(因子 u は単にローレンツ群の回転部分群を構成する. 実際, もし u がユニタリーなら, $\mathrm{Tr}\,(uvu^\dagger) = \mathrm{Tr}\,v$だから, $V^0 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,v$ は $\Lambda(u)$ のもとで不変だ.) さらに, この分解は一意的だから, $SL(2,C)$ はトポロジー的に単に全ての u のなす空間と全ての h の空間の直積 (点の対の集合) になっている. トレースがゼロの任意の 2×2 エルミート行列 h は,

$$h = \begin{pmatrix} c & a-ib \\ a+ib & -c \end{pmatrix}$$

と表せる. ここで, a, b, c は実で, それ以外特に拘束されていない. したがって, 全ての h の空間は, トポロジー的に通常の 3 次元の平らな空間 R_3 に等しい. 一方, 行列式が 1 の任意の 2×2 ユニタリー行列は以下のように表せる.

$$u = \begin{pmatrix} d+ie & f+ig \\ -f+ig & d-ie \end{pmatrix}\ .$$

ここで, d, e, f, g は以下の非線形拘束条件にのみ従う.

$$d^2 + e^2 + f^2 + g^2 = 1\ .$$

したがって, すべての u が作る $SU(2)$ の空間は, トポロジー的に平らな 4 次元空間内の 3 次元球殻 S_3 と同じだ. このため, $SL(2,C)$ はトポロジー的に直積 $R_3 \times S_3$と同等になっている. この空間は単連結だ. つまり, R_3 か S_3 の任意の 2 点をつなぐ曲線は互いに変形でき, それは直積についても同じようにいえる. (円 S_1 以外の全ての球 S_n は単連結になっている.) しかし, ここで興味があるのは $SL(2,C)$ ではなく $SL(2,C)/Z_2$だ. λ を $-\lambda$ と同一視することは, ユニタリー因子 u と $-u$ を同一視することと等しい. (これは e^h が常に正であることによる.) したがって, ローレンツ群は $R_3 \times S_3/Z_2$のトポロジーを持つ. ここで, S_3/Z_2 は球の反対側にある点を同一視した 3 次元球面だ. これは単連結ではない. たとえば, S_3 で u から u' への経路と u から $-u'$ への経路を考えると, これらの経路は S_3/Z_2では同じ点を結んだものだが, 互いに連続的に変形できない. 実際, S_3/Z_2 は 2 重連結になっている. 任意の 2 点を結ぶ経路は, $u \to -u$ の反転を含むかどうかで 2 種類に分けられる. 経路は同じ種類の経路には変形できる. これは, 同じ経路を 2 回まわって元に戻る 2 重ループは必ず 1 点に縮めることができる, と書き換えることもできる. (補遺 B で論じるように, これは数学的には, S_3/Z_2 の基本群, または, 第 1 ホモトピー群が Z_2であるという.) 同様に, 非斉次ローレンツ群は $R_4 \times R_3 \times S_3/Z_2$と同じトポロジーをもつので, 2 重連結だ.

ローレンツ群 (斉次でも非斉次でも) は単連結ではないので, 固有射影表現を持てる. しかし, 1 から Λ へ, そして, $\Lambda\bar{\Lambda}$ へ行きまた 1 に戻ることを繰返してできる 2 重ループは 1 点に縮めることが可能だから,

$$\left[U(\Lambda)U(\bar{\Lambda})U^{-1}(\Lambda\bar{\Lambda})\right]^2 = 1$$

を得る. したがって, 位相 $e^{i\phi(\Lambda,\bar{\Lambda})}$ は単に符号だ.

$$U(\Lambda)U(\bar{\Lambda}) = \pm U(\Lambda\bar{\Lambda})\,. \qquad (2.7.43)$$

同様に, 非斉次ローレンツ群については,

$$U(\Lambda, a)U(\bar{\Lambda}, \bar{a}) = \pm U(\Lambda\bar{\Lambda}, \Lambda\bar{a} + a) \tag{2.7.44}$$

となる. これらの「符号を除いた表現」はなじみのものだ. これらは, 単に, (2.7.43) と (2.7.44) の符号が常に +1 の整数スピンの状態と, 符号が, 1 から Λ へ, そして, $\Lambda\bar{\Lambda}$ へ行きまた 1 に戻る経路が 1 点に縮めることできるかどうかで, +1 か−1 の符号をもつ半整数スピンの状態だ. この違いは, 角運動量の 3 軸成分が σ の状態に 3 軸の周りの 2π 回転が働いたとき, 位相 $e^{2i\pi\sigma}$がでるために発生するものだ. したがって, これは整数スピンの状態に何の影響も無く, 半整数スピン状態では符号を変える. (これらの二つの場合は, 第 1 ホモトピー群の二つの既約表現に対応する.) したがって, (2.7.43) あるいは (2.7.44) は超選択則を与える. つまり, 整数と半整数のスピン状態を重ねあわせることはできない.

質量がゼロでないのときには, 小群の生成子のよく知られた表現, つまり, 単に整数か半整数の j の角運動量行列 $\mathbf{J}^{(j)}$ を使って, 純粋に代数的にスピンが整数か半整数に限られることを以前に導いた. 一方, 質量がゼロの場合は, 小群の物理的 1 粒子状態への作用は, 単に運動量の周りの回転であり, ここでは, ヘリシティが整数か半整数に限られる代数的理由は無かった. しかし, トポロジー的な理由はある. つまり, 運動量の周りの 4π の回転は連続的に恒等変換に変形できるので, 因子 $\exp(4\pi i\sigma)$ は 1 であり, したがって, σ は整数か半整数でなければならない.

射影表現を使って超選択則を適用する代りに, 単にローレンツ群を前のように $SL(2,C)/Z_2$ とせずに, $SL(2,C)$ に拡張できる. 通常の回転は, 整数と半整数スピン状態間の遷移を禁じるから, 唯一の違いは群が単連結で, 射影表現ではなく通常の表現しか持たず, 超選択則が無いということだ. これは, 物理的状態を整数スピンと半整数スピン

の状態の線形結合として用意できることは意味しない. ただ, 自然界の観測されたローレンツ不変性からそのような重ね合せが不可能だと証明できないだけだ.

同様のことはどの対称群にもあてはまる. もし, そのリー代数が中心電荷を持てば, 全てと可換で, その固有値が中心電荷になるような生成子を含むように代数を拡張すればよい. これは 2.4 節の末尾で, ガリレイ群のリー代数に質量演算子を付け加えたのと同じ操作だ. このようにして拡張されたリー代数は, もちろん中心電荷を持たず, 群の単位元に近い部分では通常の表現しか持たないから, 超選択則を必要としない. 同様に, リー群 G が単連結でなければ, G の「普遍被覆群」として知られる単連結の群 C と C の不変部分群 H を使って, G は常に C/H と表せる.† 一般に, 対称群を G の代わりに C としてよい. これは G からは超選択則が導かれ, C ではそうではないことを除いて, その結果に差が無いからだ. まとめれば, 超選択則は多少目をそらす役割だけをしているといってもよい. 物理的状態は任意の重ね合せとして用意できるものもできないものもある. しかし, これは対称性原理から決めることはできない. なぜなら, 自然界の対称群をどんなものと考えるにせよ, 常に超選択則を導かないこと以外は同じ結果を与える他の群があるからだ.

補遺 A: 対称性の表現に関する定理

この補遺では, どのような対称性変換もヒルベルト空間上で線形ユニタリーか反線形反ユニタリーな演算子で表されるというウィグナーの基礎的な定理[2]の証明を与える. このために主に使う対称性変換の

---

†C/H の第 1 ホモトピー群は H だ. 斉次ローレンツ群の被覆群は $SL(2,C)$ であり, 3 次元回転群の被覆群は $SU(2)$ であることをみた. この SL と SU の群の関係は 3, 4, 6 次元で特有のものだ. 一般の d 次元では, $SO(d)$ の被覆群には特別の名前「$Spin(d)$」が付けられている.

性質は, それが遷移確率を変えない射線変換だということだ. つまり, もし Ψ_1 と Ψ_2 が射線 $\mathcal{R}_1$ と $\mathcal{R}_2$ に属する状態ベクトルなら, 変換を T とすると, 変換された射線 $T\mathcal{R}_1$ と $T\mathcal{R}_2$ に属する任意の状態ベクトル Ψ'_1 と Ψ'_2 は以下を満たす.

$$|(\Psi'_1, \Psi'_2)|^2 = |(\Psi_1, \Psi_2)|^2 . \tag{2.A.1}$$

また, 対称性変換は逆を持ち, それは上と同様に遷移確率を変えないとする.

まず, 射線 $\mathcal{R}_k$ に属し, 以下を満たす完全正規直交状態ベクトル Ψ_k を考える.

$$(\Psi_k, \Psi_l) = \delta_{kl} . \tag{2.A.2}$$

また, Ψ'_k を変換された射線 $T\mathcal{R}_k$ に属する任意の状態ベクトルとする. (2.A.1) より,

$$|(\Psi'_k, \Psi'_l)|^2 = |(\Psi_k, \Psi_l)|^2 = \delta_{kl}$$

を得る. しかし, (Ψ'_k, Ψ'_k) は自動的に実数で正だから, これはこの値が 1 であることを意味する. したがって,

$$(\Psi'_k, \Psi'_l) = \delta_{kl} \tag{2.A.3}$$

となる. これらの変換された状態 Ψ'_k もまた完全系をなすことは簡単にわかる. もし, 全ての Ψ'_k と直交するゼロでない状態ベクトル Ψ' があると, Ψ' が属する射線の逆変換はゼロでない状態ベクトル Ψ'' であり, これは全ての k について以下を満たす.

$$|(\Psi_k, \Psi'')|^2 = |(\Psi'_k, \Psi')|^2 = 0 .$$

Ψ_k は完全系をなすから, この式は成立できない.

状態 Ψ'_k の位相を決めなければならない. この目的のために, Ψ_k のうち一つを取り出し, Ψ_1 と呼ぶ. そして, $k \neq 1$ についての射線 $\mathcal{S}_k$ に

属する以下の状態ベクトルを考える.

$$\Upsilon_k \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\Psi_1 + \Psi_k]\,. \tag{2.A.4}$$

変換された射線 $T\mathcal{S}_k$ に属する任意の状態ベクトル Υ'_k は状態ベクトル Ψ'_lで展開できる,

$$\Upsilon'_k = \sum\nolimits_l c_{kl}\Psi'_l\,.$$

(2.A.1) から,

$$|c_{kk}| = |c_{k1}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

となる. $l \neq k$ と $l \neq 1$ に対しては,

$$c_{kl} = 0$$

が成立する. 明らかに, 任意の kに対して, 二つの状態ベクトル Υ'_k と Ψ'_k の位相を適切に選べば, 二つのゼロでない係数 c_{kk} と c_{k1} の位相を調整して, これらが共に単に $1/\sqrt{2}$であるようにできる. これ以降, このように選んだ状態ベクトル Υ'_k と Ψ'_k を $U\Upsilon_k$ と $U\Psi_k$と書く. これまでに見たように,

$$U\frac{1}{\sqrt{2}}[\Psi_k + \Psi_1] = U\Upsilon_k = \frac{1}{\sqrt{2}}[U\Psi_k + U\Psi_1] \tag{2.A.5}$$

となる. しかし, まだ一般的な状態ベクトル Ψに対して $U\Psi$ を定義していない.

ここで, 任意の射線 $\mathcal{R}$ に属する任意の状態ベクトル Ψ を考え, それを Ψ_kで展開する.

$$\Psi = \sum_k C_k \Psi_k\,. \tag{2.A.6}$$

変換された射線 $T\mathcal{R}$ に属するどの状態 Ψ' も同様に完全正規直交系 $U\Psi_k$で展開する.

$$\Psi' = \sum_k C'_k U\Psi_k\,. \tag{2.A.7}$$

$|(\Psi_k, \Psi)|^2$ と $|(U\Psi_k, \Psi')|^2$ が等しいことから, 全ての k ($k = 1$ を含む) について以下が成立することが導かれる.

$$|C_k|^2 = |C_k'|^2 \,. \tag{2.A.8}$$

また, $|(\Upsilon_k, \Psi)|^2$ と $|(U\Upsilon_k, \Psi')|^2$ が等しいことから, 全ての $k \neq 1$ に対して,

$$|C_k + C_1|^2 = |C_k' + C_1'|^2 \tag{2.A.9}$$

がわかる. (2.A.9) と (2.A.8) の比をとると,

$$\mathrm{Re}\,(C_k/C_1) = \mathrm{Re}\,(C_k'/C_1') \tag{2.A.10}$$

となるが, これと (2.A.8) から, 以下を得る.

$$\mathrm{Im}\,(C_k/C_1) = \pm\mathrm{Im}\,(C_k'/C_1') \,. \tag{2.A.11}$$

したがって,

$$C_k/C_1 = C_k'/C_1' \tag{2.A.12}$$

か,

$$C_k/C_1 = (C_k'/C_1')^* \tag{2.A.13}$$

が導かれる. さらに, どの k についても, どちらか一方だけを共通に選ばなければならないことがわかる. (このステップはウィグナーの証明では省略された.) これを見るには, ある k では $C_k/C_1 = C_k'/C_1'$ であり, 別の $l \neq k$ では $C_l/C_1 = (C_l'/C_1')^*$ であるとする. また, これらが本当に異なる場合になるように, 両方の比が共に複素数であるとする. (ところで, これは $k \neq 1$, $l \neq 1$, $k \neq l$を必要とする.) これが不可能であることを以下に示す.

状態ベクトル $\Phi \equiv \frac{1}{\sqrt{3}}[\Psi_1 + \Psi_k + \Psi_l]$ を定義する. この状態ベクトルの係数の比は全て実数だから, 変換された射線に属するどんな状態ベクトル Φ',

$$\Phi' = \frac{\alpha}{\sqrt{3}}[U\Psi_1 + U\Psi_k + U\Psi_l]$$

も同じ比を持っていなければならない．ここで，α は $|\alpha|=1$ の位相因子だ．しかし，遷移確率 $|(\Phi,\Psi)|$ と $|(\Phi',\Psi')|$ が等しいことから以下を得る．

$$\left|1+\frac{C_k'}{C_1'}+\frac{C_l'}{C_1'}\right|^2=\left|1+\frac{C_k}{C_1}+\frac{C_l}{C_1}\right|^2 .$$

したがって，

$$\left|1+\frac{C_k}{C_1}+\frac{C_l^*}{C_1^*}\right|^2=\left|1+\frac{C_k}{C_1}+\frac{C_l}{C_1}\right|^2$$

となる．これは，

$$\mathrm{Re}\left(\frac{C_k}{C_1}\frac{C_l^*}{C_1^*}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{C_k}{C_1}\frac{C_l}{C_1}\right) ,$$

つまり，書き換えれば，

$$\mathrm{Im}\left(\frac{C_k}{C_1}\right)\mathrm{Im}\left(\frac{C_l}{C_1}\right)=0$$

のときにのみ可能だ．したがって，C_k/C_1 か C_l/C_1 はどんな対 k,l に対しても実であり，仮定に矛盾する．したがって，与えられた対称性変換 T が状態ベクトル $\sum_k C_k\Psi_k$に施されたとき，全ての kについて (2.A.12) であるか，または全てのの kに対して (2.A.13) であることがわかる．

ウィグナーは第二の可能性 (2.A.13) を考えなかった．これは，彼が示したようにこの可能性が実現しているどのような対称性変換も時間反転を含まなければならないが，彼の証明では時間の方向に影響しない回転のような対称性のみを考えたからだ．ここでは，時間反転を他の対称性と同様に扱って対称性を論じているので，対称性 Tと状態ベクトル $\sum_k C_k\Psi_k$それぞれに対して (2.A.12) か (2.A.13) が成立する可能性を考えなければならない．これらのどちらが実現しているかに応じて，$U\Psi$ は射線 $T\mathcal{R}$ に属する特定の状態ベクトル Ψ' で，それぞれ，位相が $C_1=C_1'$ か $C_1=C_1'^*$に選ばれたものとする．こうすると，

$$U(\sum_k C_k\Psi_k)=\sum_k C_kU\Psi_k \tag{2.A.14}$$

か

$$U(\sum_k C_k \Psi_k) = \sum_k C_k{}^* U \Psi_k \qquad (2.A.15)$$

が成立する．

与えられた対称性変換に対して, (2.A.14) と (2.A.15) のうちどちらを選ぶかを係数 C_k の任意の値について共通にしなければならないことを証明する. (2.A.14) が状態ベクトル $\sum_k A_k \Psi_k$ に働き, (2.A.15) が状態ベクトル$\sum_k B_k \Psi_k$ に作用するとする. このとき, 遷移確率の不変性から, 以下が要求される.

$$|\sum_k B_k^* A_k|^2 = |\sum_k B_k A_k|^2 \ .$$

これは以下と同等だ.

$$\sum_{kl} \mathrm{Im}\,(A_k^* A_l)\,\mathrm{Im}\,(B_k^* B_l) = 0 \ . \qquad (2.A.16)$$

(2.A.16) が異なる射線に属する状態ベクトル$\sum_k A_k \Psi_k$ と $\sum_k B_k \Psi_k$ の対について満たされている可能性は排除できない. しかし, A_k も B_k も全て同じ位相ではない ((2.A.14) と (2.A.15) が同じではない) 状態ベクトルの任意の対について, 常に第三の状態ベクトル $\sum_k C_k \Psi_k$ があり, 以下が成立する.*

$$\sum_{kl} \mathrm{Im}\,(C_k^* C_l)\,\mathrm{Im}\,(A_k^* A_l) \neq 0 \qquad (2.A.17)$$

かつ,

$$\sum_{kl} \mathrm{Im}\,(C_k^* C_l)\,\mathrm{Im}\,(B_k^* B_l) \neq 0 \ . \qquad (2.A.18)$$

---

*もし, ある対 k, l で $A_k^* A_l$ と $B_k^* B_l$ が共に複素数ならば, C_k と C_lを除く全ての C がゼロで, またこの二つの係数が違う位相を持つように選ぶ. もし, ある対 k, l で $A_k^* A_l$ が複素数だが, $B_k^* B_l$ が実数なら, $B_m^* B_n$ が複素数になる他の対 m, n がある. (多分 m か n が k か lに等しい. しかし両方とも等しくはない.) もし, $A_m^* A_n$ も複素数なら, C_m と C_nを除く全ての Cがゼロで, これらの二つの係数が異なる位相を持つように選ぶ. もし, $A_m^* A_n$ が実数なら, 全ての C が C_k, C_l ,C_m, C_nを除いてゼロになり, これらの係数がすべて異なる位相を持つように選ぶ. $B_k^* B_l$ が複素数で $A_k^* A_l$ が実数の場合も同様に扱える.

上で見たように, (2.A.17) から, (2.A.14) と (2.A.15) のどちらを選ぶかを $\sum_k A_k\Psi_k$ と $\sum_k C_k\Psi_k$ について同じにしなければならないし, また, (2.A.18) から, (2.A.14) と (2.A.15) のどちらを選ぶかを $\sum_k B_k\Psi_k$ と $\sum_k C_k\Psi_k$ について同じにしなければならない. したがって, (2.A.14) と (2.A.15) はもとの二つの状態ベクトル $\sum_k A_k\Psi_k$ と $\sum_k B_k\Psi_k$ でも同じ選択をしなければならない. したがって, 与えられた対称性 T について全ての状態ベクトルは (2.A.14) を満たすか, もしくは全ての状態ベクトルは (2.A.15) を満たす.

ここまでくれば, 定義にしたがって, 量子力学的演算子 U が線形ユニタリーか反線形反ユニタリーであることは簡単に示せる. まず (2.A.14) が全ての状態ベクトル$\sum_k C_k\Psi_k$について成立するとする. どのような二つの状態ベクトル Ψ と Φ も,

$$\Psi = \sum_k A_k\Psi_k\ , \quad \Phi = \sum_k B_k\Psi_k$$

と展開的できる. したがって, (2.A.14) を使うと,

$$U(\alpha\Psi + \beta\Phi) = U\sum_k(\alpha A_k + \beta B_k)\Psi_k = \sum_k(\alpha A_k + \beta B_k)U\Psi_k$$
$$= \alpha\sum_k A_k U\Psi_k + \beta\sum_k B_k U\Psi_k$$

を得る. (2.A.14) を再び使うと, これより,

$$U(\alpha\Psi + \beta\Phi) = \alpha U\Psi + \beta U\Phi \tag{2.A.19}$$

となるから, U は線形だ. また, (2.A.2) と (2.A.3) を使うと, 変換された状態のスカラー積は,

$$(U\Psi, U\Phi) = \sum_{kl} A_k^* B_l (U\Psi_k, U\Psi_l) = \sum_k A_k^* B_k$$

となるから,

$$(U\Psi, U\Phi) = (\Psi, \Phi) \tag{2.A.20}$$

であり, U は ユニタリーだ.

全ての状態ベクトルに対して (2.A.15) を満たす対称性もほぼ同じように扱える. 読者は多分独力でこれを示すことができるだろうが, 反線形演算子には馴染みがないかもしれないので, ともかく詳細をここに与えておく. 全ての状態ベクトル$\sum_k C_k \Psi_k$ に対して (2.A.15) が満たされているとする. どのような二つの状態ベクトル Ψ と Φ も前のように展開できるので,

$$\begin{aligned} U(\alpha\Psi + \beta\Phi) &= U\sum_k (\alpha A_k + \beta B_k)\Psi_k \\ &= \sum_k (\alpha^* A_k^* + \beta^* B_k^*) U\Psi_k = \alpha^* \sum_k A_k^* U\Psi_k + \beta^* \sum_k B_k^* U\Psi_k \end{aligned}$$

となる. (2.A.15) をまた使うと,

$$U(\alpha\Psi + \beta\Phi) = \alpha^* U\Psi + \beta^* U\Phi \tag{2.A.21}$$

が得られ, U が 反線形であることが示される. また, (2.A.2) と (2.A.3) から, 変換された状態のスカラー積が,

$$(U\Psi, U\Phi) = \sum_{kl} A_k B_l^* (U\Psi_k, U\Psi_l) = \sum_k A_k B_k^*$$

となるので,

$$(U\Psi, U\Phi) = (\Psi, \Phi)^* \tag{2.A.22}$$

であり, U は 反ユニタリーとなる.

補遺 B: 群の演算子とホモトピー類

この補遺では, 2.7 節で述べた定理を証明する. この定理によれば, 以下の二つの条件が満たされれば, 有限対称性変換 T の演算子 $U(T)$ は, その位相を選ぶことにより群の射影表現ではなく通常の表現をな

すようにできる. その条件とは, (a) リー代数に中心電荷が現れないように群の生成子が定義できる, (b) 群が単連結, だ. また, 単連結ではない群で出会う射影表現についても, その群のホモトピー類との関連を述べる.

この定理を証明するには, 対称性変換に対応する表現の構成法を思い出そう. 2.2 節で述べたように, これらの変換のパラメータとして実変数 θ^a の集合を, (2.2.15) の合成則が成立するように導入する.

$$T(\bar{\theta})T(\theta) = T\Big(f(\bar{\theta},\theta)\Big).$$

演算子 $U(T(\theta)) \equiv U[\theta]$ が対応する条件,

$$U[\bar{\theta}]U[\theta] = U\Big[f(\bar{\theta},\theta)\Big] \tag{2.B.1}$$

を満たすように構成したい.* これを行うために, 群のパラメータ空間に, 原点からそれぞれの点 θへの任意の「基準」経路 $\Theta^a_\theta(s)$ を定義する. このとき, $\Theta^a_\theta(0) = 0$ と $\Theta^a_\theta(1) = \theta^a$ とし, それぞれの経路に沿って $U_\theta(s)$ を以下の微分方程式で定義する.

$$\frac{d}{d\,s}U_\theta(s) = it_a U_\theta(s) h^a{}_b\left(\Theta_\theta(s)\right)\frac{d\Theta^b_\theta(s)}{d\,s}\,. \tag{2.B.2}$$

初期条件は,

$$U_\theta(0) = 1 \tag{2.B.3}$$

となる. ここで,

$$[h^{-1}]^a{}_b(\theta) \equiv \left[\frac{\partial f^a(\bar{\theta},\theta)}{\partial\bar{\theta}^b}\right]_{\bar{\theta}=0} \tag{2.B.4}$$

だ. 最終的には演算子 $U[\theta]$ を $U_\theta(1)$ と同定するが, まずは $U_\theta(s)$ の幾つかの性質を調べなければならない.

*ここで, 角括弧 "[...]" は群のパラメータの関数として構成した U と群の変換そのものの関数として表したものを区別するために用いている.

合成則を調べるために, 2 点 θ_1 とθ_2を考え, 0 から θ_1 へ行き, そのあと $f(\theta_2,\theta_1)$ へ進む経路 $\mathcal{P}$ を定義する.

$$\Theta^a_{\mathcal{P}}(s) \equiv \begin{cases} \Theta^a_{\theta_1}(2s) & 0 \le s \le \frac{1}{2}\,, \\ f^a\left(\Theta_{\theta_2}(2s-1),\theta_1\right) & \frac{1}{2} \le\ s \le 1. \end{cases} \tag{2.B.5}$$

最初の区分の終りでは $U_{\mathcal{P}}(\frac{1}{2}) = U_{\theta_1}(1)$ にいる. $U_{\mathcal{P}}(s)$ を第二の区分に沿って求めるには, $f^a(\Theta_{\theta_2}(2s-1),\theta_1)$ の微分が必要だ. この目的のために, 基本結合則を使う.

$$f^a\left(f(\theta_3,\theta_2),\theta_1\right) = f^a\left(\theta_3, f(\theta_2,\theta_1)\right). \tag{2.B.6}$$

θ^c_3 の係数を $\theta_3 \to 0$ の極限で合わせると以下を得る.

$$\frac{\partial f^a(\theta_2,\theta_1)}{\partial \theta^b_2} h^c{}_a\left(f(\theta_2,\theta_1)\right) = h^c{}_b(\theta_2)\,. \tag{2.B.7}$$

第二の区分では, $U_{\mathcal{P}}(s)$ の微分方程式 (2.B.2) は $U_{\theta_2}(2s-1)$ の微分方程式と同じだ. これらは異なる初期条件を満たすが, $U_{\mathcal{P}}(s)U^{-1}_{\theta_1}(1)$ は $U_{\theta_2}(2s-1)$ と同じ微分方程式を満たし, $s=\frac{1}{2}$で共に 1 となり, 同じ初期条件を満たす. したがって, $\frac{1}{2} \le s \le 1$ では以下が成立すると結論できる.

$$U_{\mathcal{P}}(s)\, U^{-1}_{\theta_1}(s) = U_{\theta_2}(2s-1)\,.$$

特に,

$$U_{\mathcal{P}}(1) = U_{\theta_2}(1)\, U_{\theta_1}(1) \tag{2.B.8}$$

だ. しかし, これは $U_\theta(1)$ が望みの複合則 (2.B.1) を満たすことを意味しない. これは, 経路 $\Theta_{\mathcal{P}}(s)$ は $\theta^a = 0$ から$\theta^a = f^a(\theta_2,\theta_1)$ へのものだが, 前に選んだ$\theta^a = 0$ と $\theta^a = f^a(\theta_2,\theta_1)$ を結ぶ「基準」経路とは一般的には同じでないからだ. $U[\theta]$ が $U_\theta(1)$ と同じであることを示すには, $U_\theta(1)$ が 0 とθ を結ぶ経路の取り方に依らないことを示さなければならない.

この目的のために, 0 から θ への経路の変化 $\delta\Theta(s)$ のもとでの $U_\theta(s)$ の変化 δU を調べる. (2.B.2) の変分を取ると以下の微分方程式が得られる.

$$\frac{d}{ds}\delta U = it_a\delta U\, h^a_{\ b}(\Theta)\frac{d\Theta^b}{ds} + it_a U h^a_{\ b,c}(\Theta)\delta\Theta^c\frac{d\Theta^b}{ds} + it_a U h^a_{\ b}(\Theta)\frac{d\delta\Theta^b}{ds}\,.$$

ここで $h^a_{\ b,c} \equiv \partial h^a_{\ b}/\partial\Theta^c$ だ. (中心電荷無しの) リー交換関係 (2.2.22) を使い, 多少, 式変形をすると以下を得る.

$$\frac{d}{ds}\left(U^{-1}\delta U\right) = \frac{d}{ds}\left(i\,U^{-1}t_a U h^a_{\ b}\delta\Theta^b\right) + i\,U^{-1}t_a U\delta\Theta^b\frac{d\Theta^c}{ds}\left(h^a_{\ c,b} - h^a_{\ b,c} + C^a_{\ ed}h^e_{\ b}h^d_{\ c}\right)\,. \tag{2.B.9}$$

しかし, 結合条件 (2.B.6) で極限 $\theta_3, \theta_2 \to 0$ をとると, 全ての θについて,

$$h(\theta)^a_{\ b,c} = -f^a_{\ de}h(\theta)^d_{\ b}h(\theta)^e_{\ c} \tag{2.B.10}$$

が成立することがわかる. ここで, $f^a_{\ de}$ は (2.2.19) で定義される係数だ. b と c について反対称化すると, (2.B.9) の最後の項は消える, つまり,

$$h^a_{\ c,b} - h^a_{\ b,c} + C^a_{\ ed}h^e_{\ b}h^d_{\ c} = 0 \tag{2.B.11}$$

を得る. したがって, (2.B.9) から, 量

$$U^{-1}\delta U - iU^{-1}t_a U h^a_{\ b}\delta\Theta^b$$

が経路 $\theta(s)$ に沿って一定であることがわかる. これより, $U_\theta(1)$ が端点 $\Theta(0) = 0$ と $\Theta(1) = \theta$ を変えない (また $U_\theta(0) = 1$ の) 経路の微小変分のもとで停留することがわかる. しかし, 仮定 (b) は $\Theta(0) = 0$ から $\Theta(1) = \theta$ へのどのような経路も互いに連続的に変形できるということであり, これより, $U_\theta(1)$ を経路の取り方に依らない θ のみの関数と見なすことができる.

$$U_\theta(1) \equiv U[\theta]. \tag{2.B.12}$$

特に, 経路 $\mathcal{P}$ は 0 と $f(\theta_2, \theta_1)$ をつなぐので,

$$U_{\mathcal{P}}(1) = U[f(\theta_2, \theta_1)] \tag{2.B.13}$$

が成立する. したがって, (2.B.8) より, $U[\theta]$ が群の積の法則 (2.B.1) を満たすことがわかる. これで証明が完成した.

これで非射影的表現 $U[\theta]$ が構成できたので, 同じ表現の生成子 t_a を持つ同じ群のどのような射影表現 $\tilde{U}[\theta]$ も $U[\theta]$ と位相だけしか違わないことを証明するばかりだ.

$$\tilde{U}[\theta] = e^{i\alpha(\theta)} U[\theta] \,.$$

これが成立すれば, $\tilde{U}[\theta]$ の積の法則での位相 ϕ,

$$\tilde{U}[\theta']\tilde{U}[\theta] = e^{i\phi(\theta', \theta)} \tilde{U}[f(\theta', \theta)]$$

は単に $\tilde{U}[\theta]$ の位相変化で取り除ける. これをみるには, 演算子,

$$U[\theta]^{-1} U[\theta']^{-1} \tilde{U}[\theta'] \tilde{U}[\theta] = U[f(\theta', \theta)]^{-1} \tilde{U}[f(\theta', \theta)] e^{i\phi(\theta', \theta)}$$

を考える. $U[\theta]$ と $\tilde{U}[\theta]$ は同じ生成子を持つから, 左辺の θ'^a 微分は $\theta' = 0$ でゼロとなる. したがって, 以下が成立する.

$$0 = \frac{\partial}{\partial \theta^b} \left\{ U[\theta]^{-1} \tilde{U}[\theta] \right\} + i\phi_b(\theta) U[\theta]^{-1} \tilde{U}[\theta] \,.$$

ここで,

$$\phi_b(\theta) \equiv h^a{}_b(\theta) \left[\frac{\partial}{\partial \theta'^b} \phi(\theta', \theta) \right]_{\theta'=0}$$

だ. θ^c で微分して b と c について反対称化すると, 以下を得る.

$$0 = \frac{\partial \phi_b(\theta)}{\partial \theta^c} - \frac{\partial \phi_c(\theta)}{\partial \theta^b} \,.$$

よく知られた定理[13]によれば, これより, 単連結の空間では ϕ_b がある関数 β の勾配と書ける.

$$\phi_b(\theta) = \frac{\partial \beta(\theta)}{\partial \theta^b}.$$

したがって, 量 $U[\theta]^{-1}\tilde{U}[\theta]e^{i\beta(\theta)}$ は実際にθについて一定だ. その値を $\theta=0$ での値にとれば, $\tilde{U}$ が単に U に比例することがわかる.

$$\tilde{U}[\theta]=U[\theta]\exp(-i\beta(\theta)+i\beta(0))\ .$$

これで証明ができた.

* * *

この解析から, リー代数に中心電荷が無いが群は単連結でないときに, 群の積の法則に現れる位相因子の性質についてある程度のことがわかる. いま, ゼロから θ へ, そして $f(\bar{\theta},\theta)$ へ進む経路 $\mathcal{P}$ が, ゼロから $f(\bar{\theta},\theta)$ へ行く基準経路に変形できないとする. 言い換えると, ゼロから θ, $f(\bar{\theta},\theta)$ へと進みゼロに戻るある経路が連続的に 1 点に縮めることが出来ないとする. このとき, $U^{-1}(f(\theta_2,\theta_1))U(\theta_2)U(\theta_1)$ は位相因子 $\exp(i\phi(\theta_2,\theta_1))\neq 1$ でありえるが, ϕ は互いに連続的に変形できる経路についてはすべて同一だ. 原点から出て原点に戻る全てのループの内, あるループに連続的に変形できるものの集合は, そのループのホモトピー類を作る. これまでにみたように, $\phi(\theta_2,\theta_1)$ はゼロから θ, $f(\bar{\theta},\theta)$ へと進みゼロに戻る経路のホモトピー類にのみ依る. ホモトピー類の集合は群をなす. $\mathcal{L}_1$ と $\mathcal{L}_2$のホモトピー類の「積」は, $\mathcal{L}_1$ と $\mathcal{L}_2$を続いてまわるループのホモトピー類だ. ループ $\mathcal{L}$ のホモトピー類の「逆」は $\mathcal{L}$ を逆方向にまわるループのホモトピー類だ. そして, 「単位元」は原点に縮めれるループのホモトピー類だ. この群はこの空間の**第 1 ホモトピー群** (first homotopy group) , または, **基本群** (fundamental group) という. 位相因子がこの群の表現をなすことはたやすくわかる. もし, ループ $\mathcal{L}$ を 1 周して位相因子 $e^{i\phi}$ が出て, ループ$\bar{\mathcal{L}}$ を 1 周して位相因子 $e^{i\bar{\phi}}$ が出るなら, 両方のループを回れば, 位相因子 $e^{i\phi}e^{i\bar{\phi}}$ が出る. したがって, もし与えられた (中心電荷を持たない) 群 $\mathcal{G}$のパラメータ空間の第 1 ホモトピー群の 1 次元表現がわかれば, $\mathcal{G}$ の射影表現として可能なものを全て書き出せることになる.

ホモトピー群は 4 巻 (原著 II 巻) で非常に詳しく調べる.

補遺 C: 反転と縮退した多重項

通常, 反転 T と P は, 1 粒子状態を同じ種類の別の 1 粒子状態へ, しばしば粒子の種類に依る位相因子を伴って変換すると仮定する. 2.6 節では 1 粒子状態の縮退した多重項にはこれより複雑に作用するかもしれないと簡潔に述べた. この可能性は多分最初にウィグナー[15]によって 1964 年に指摘された. この補遺では, ウィグナーのように仮定を設けて制限せずに, 位相因子の代りに有限行列を持つ一般化された反転演算子を調べる.

時間反転から調べよう. ウィグナーは反転演算子について, その 2 乗が恒等演算子に比例するいう制限を設けた. T は反ユニタリーだから, T^2 の比例係数が ± 1 であることがすぐにわかる. この係数は超選択則で分けられている粒子の種類によって違っていてもよい. $2j$ が偶か奇の値を持つ状態の空間で T^2 の比例係数が 2.6 節で見出した符号 $(-1)^{2j}$ の逆であれば, その物理的状態は演算子 T のいままでに仮定したよりも複雑な表現を作ることになる. しかし, この可能性を認めるなら, T^2 が恒等演算子に比例するというウィグナーの条件を課す必然性も無くなる. 拡張ポアンカレ群の構造を使うのもあまり説得力があるとはいえない. どんな反転演算子もその唯一の使える定義は, その演算子が厳密に, または近似的に保存するようなものであり, この定義によれば, T^2 は恒等演算子に比例しないかもしれない.

時間反転についてより一般的な可能性を探るために, 質量がゼロでない 1 粒子には次のように作用するとする.

$$\mathsf{T}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} = (-1)^{j-\sigma} \sum_m \mathcal{T}_{mn}\, \Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,m} \,. \tag{2.C.1}$$

ここで, $\mathbf{p}$, j, σ はそれぞれ, この粒子の運動量, スピン, スピンの z成

分であり, n, m は粒子の縮退した多重項の成分を区別するための添字だ. (因子 $(-1)^{j-\sigma}$ と $\mathbf{p}$ と σ の反転は 2.6 節と同様に導かれる.) 行列 $\mathcal{T}_{mn}$ は, T が反ユニタリーなので $\mathcal{T}$ はユニタリーだということ以外, 未知だ.

さて, 1 粒子状態の基底を適当に選び直してこの変換を簡単化できるか見てみよう. 新しい状態をユニタリー変換 $\Psi'_{\mathbf{p},\sigma,n} = \sum_m \mathcal{U}_{mn} \Psi_{\mathbf{p},\sigma,m}$ で定義する. このとき, 変換 (2.C.1) は行列 $\mathcal{T}_{mn}$ を以下と入れ替えたもので与えられる.

$$\mathcal{T}' = \mathcal{U}^{-1} \mathcal{T} \mathcal{U}^* \ . \tag{2.C.2}$$

一般的には, T がユニタリーのときのように, このような 1 粒子状態の基底の選択によって $\mathcal{T}'$ を対角的にすることは出来ない. しかし, その代りにブロック対角にはできる. そのブロックは 1×1 の位相か, 以下の形の 2×2 行列になる.

$$\begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi/2} \\ e^{-i\phi/2} & 0 \end{pmatrix} . \tag{2.C.3}$$

ここで, ϕ はいろいろな実数の位相だ.

(証明は以下のようにする. まず, (2.C.2) より,

$$\mathcal{T}'\mathcal{T}'^* = \mathcal{U}^{-1} \mathcal{T} \mathcal{T}^* \mathcal{U}$$

が得られる. これはユニタリー変換だから, ユニタリー行列 $\mathcal{T}\mathcal{T}^*$を対角化するように選ぶことが出来る. これがされたとすると, プライム (′) を省略して,

$$\mathcal{T} = D \mathcal{T}^T \ . \tag{2.C.4}$$

ただし, ここで, D は位相 $e^{i\phi_n}$ を対角成分にもつユニタリー対角行列となる. これからすぐに, 対角成分 $\mathcal{T}_{nn}$は $e^{i\phi_n} = 1$ でないかぎり, ゼロとなることがわかる. さらに, もし $e^{i\phi_n} = 1$ で $e^{i\phi_m} \neq 1$ ならば,

(2.C.4) から $\mathcal{T}_{nm} = \mathcal{T}_{mn} = 0$ がわかる. $e^{i\phi_n} = 1$ となる全ての行と列を最初に並べると, $\mathcal{T}$ は以下の形となる.

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & \mathcal{B} \end{pmatrix} . \tag{2.C.5}$$

ここで, $\mathcal{A}$ は対称で, ユニタリーであり, $\mathcal{B}$ の対角成分は全てゼロとなる. $\mathcal{A}$ は対称だから, ある対称な反エルミート行列の指数関数として表せる. したがって, それは, 変換 (2.C.2) で $\mathcal{A}$ のみに作用するものを考え, $\mathcal{U}$ の部分行列が実直交行列になっているもので対角化できる. したがって, $e^{i\phi_n} \neq 0$ の行と列を結び付ける部分行列 $\mathcal{B}$ のみを考えればよい. $n \neq m$ のときには, (2.C.4) は $\mathcal{T}_{nm} = e^{i\phi_n}\mathcal{T}_{mn}$ と $\mathcal{T}_{mn} = e^{i\phi_m}\mathcal{T}_{nm}$ を与えるから, $\mathcal{T}_{nm} = e^{i\phi_n}e^{i\phi_m}\mathcal{T}_{nm}$ と $\mathcal{T}_{mn} = e^{i\phi_n}e^{i\phi_m}\mathcal{T}_{mn}$ が導かれる. したがって, $e^{i\phi_n}e^{i\phi_m} = 1$ でないかぎり $\mathcal{T}_{nm} = \mathcal{T}_{mn} = 0$ となる. もし, $\mathcal{B}$ で, $e^{i\phi_1} \neq 1$ の位相が同じ全ての行と列を最初に置き, 次に, 反対の位相を持つ全ての行と列, そして, $e^{\pm i\phi_1}$ と異なる他の $e^{i\phi_2} \neq 1$ の位相を持つ全ての行と列, 次に反対の位相の行と列, というように並べていくと, 行列 $\mathcal{B}$ は次のブロック対角形になる.

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mathcal{B}_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} . \tag{2.C.6}$$

ここで,

$$\mathcal{B}_i = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\phi_i/2}\mathcal{C}_i \\ e^{-i\phi_i/2}\mathcal{C}_i^T & 0 \end{pmatrix} \tag{2.C.7}$$

だ. さらに $\mathcal{T}$ のユニタリー性, そして, それによる $\mathcal{B}$ のユニタリー性から, $\mathcal{C}_i\mathcal{C}_i^\dagger = \mathcal{C}_i^\dagger\mathcal{C}_i = 1$ となり, したがって, $\mathcal{C}_i$ は正方行列でユニタリーとなる. $\mathcal{U}$ が $\mathcal{T}$ と同じ意味でブロック対角であり, i 番目のブロックが, ユニタリーな V_i と W_i を使って,

$$\begin{pmatrix} V_i & 0 \\ 0 & W_i \end{pmatrix}$$

と書ける変換 (2.C.2) を施すと, 部分行列 $\mathcal{C}_i$ は変換 $\mathcal{C}_i \to V_i^{-1}\mathcal{C}_i W_i^*$ を受ける. したがって, この変換を使って, $\mathcal{C}_i = 1$ とできる. これにより, 位相が $e^{i\phi_i}$ と $e^{-i\phi_i}$ のそれぞれのブロック内の各行と列の対の関係がわかった. 行列 $\mathcal{B}$ を (2.C.3) の形の 2×2 ブロックからなるブロック対角形にもっていくには, 行と列を i 番目のブロック内で, 位相が $e^{i\phi_i}$ の行および列と, それに対応する位相 $e^{-i\phi_i}$ の行および列とを交互に並べるだけでよい.)

ここで, $e^{i\phi} \neq 1$ のときは時間反転を対角化するように状態を選ぶことは不可能であることに注意しておく. 状態の対 $\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm}$ があって, それに T が行列 (2.C.3) で作用するときには,

$$\mathsf{T}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm} = e^{\pm i\phi/2}(-1)^{j-\sigma}\Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,\mp} \tag{2.C.8}$$

となる. したがって, これらの状態の任意の一次結合に対しては, 時間反転は,

$$\mathsf{T}\left(c_+\Psi_{\mathbf{p},\sigma,+} + c_-\Psi_{\mathbf{p},\sigma,-}\right) = \\ (-)^{j-\sigma}\left(e^{i\phi/2}c_+^*\Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,-} + e^{-i\phi/2}c_-^*\Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,+}\right)$$

と作用する. $c_+\Psi_{\mathbf{p},\sigma,+} + c_-\Psi_{\mathbf{p},\sigma,-}$ が T のもとで, 位相 λ で変換されるには,

$$e^{i\phi/2}c_+^* = \lambda c_-, \qquad e^{-i\phi/2}c_-^* = \lambda c_+$$

とならなければならない. しかし, これらの式を組み合わせると, $e^{\pm i\phi/2}c_\pm^* = |\lambda|^2 c_\pm^* e^{\mp i\phi/2}$ となるが, これは $c_+ = c_- = 0$ か $e^{i\phi}$ が 1 でない限り不可能だ. したがって, $e^{i\phi} \neq 1$ のときには, 時間反転不変性はこれらの状態に, スピンに関する縮退に加えて, 2 重の縮退を要求する.

もちろん, もし余分な「内部」対称性演算子 S がこれらの状態を,

$$\mathsf{S}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm} = e^{\pm i\phi/2}\Psi_{-\mathbf{p},\sigma,\mp}$$

と変換するなら, 時間反転演算子を $\mathsf{T}' \equiv \mathsf{S}^{-1}\mathsf{T}$ と再定義し, この演算子が $\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm}$ を互いに混ぜないようにできる. したがって, このような内部対称性が無いときにのみ, 粒子状態の 2 重性を時間反転不変性で説明できる.

T の 2 乗の問題に戻ろう. 変換 (2.C.8) を繰り返すと, 以下を得る.

$$\mathsf{T}^2\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm} = (-1)^{2j}e^{\mp i\phi}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm} \,. \tag{2.C.9}$$

もし, ウィグナーと同様に, T^2 が恒等演算子に比例すると仮定すると, $e^{i\phi} = e^{-i\phi}$でなければならない. したがって, 位相因子は実で, +1 か −1 となる. $e^{i\phi} = -1$ と選んでも, 1 粒子状態が, スピンに依る縮退に加えて, 2 重縮退を持つことに変わりはなく, ウィグナーの仮定のもとでは, 全ての粒子がこの 2 重性を持つ. しかし, (2.C.8) で一般的な位相 ϕ を選んでいけない理由はない. これはある粒子については消え, 他の粒子については残る. したがって, 観測される粒子がこの余分な 2 重性を持たないからといって, 他の粒子が 2 重性を持たないという可能性は否定出来ない.

また, パリティ演算子 P の以下のより複雑な作用も考えることができる.

$$\mathsf{P}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} = \sum_m \mathcal{P}_{nm}\Psi_{-\mathbf{p},\sigma,m} \,. \tag{2.C.10}$$

ここで, $\mathcal{P}$はユニタリー行列だが, それ以上は制限されていない. 時間反転と異なり, ここでは, 状態の基底を選んで, この行列を常に対角化できる. しかし, この基底の選び方が, 時間反転が簡単に作用するものになっていないかもしれない. したがって, 原則的には, P と T を同時に使うと, P と T を単独に使うよりも余分の縮退が要求される.

5 章で論じるように, どんな場の量子論も CPT という対称性を満たすと考えられる. これは 1 粒子状態に以下のように作用する.

$$\mathsf{CPT}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} = (-1)^{j-\sigma}\Psi_{\mathbf{p},-\sigma,n^c} \,. \tag{2.C.11}$$

ここで, n^c は粒子 n の反粒子(または「荷電共役」)を意味する. この変換では, どんな位相も行列も許されない. (もちろん, CPT と良い内部対称性を組合せればそのような位相とか行列を導入できる.) これにより,

$$(\mathsf{CPT})^2\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} = (-1)^{2j}\Psi_{\mathbf{p},-\sigma,n} \tag{2.C.12}$$

となる. したがって, ウィグナーが提案したような $(\mathsf{CPT})^2$ を作用させて符号 $-(-1)^{2j}$ が出ることは場の量子論では起らない.

T がある範囲の現象について良い対称性であれば, その逆, $\mathsf{CP} \equiv (\mathsf{CPT})\mathsf{T}^{-1}$ も良い対称性となっている. T のもとで通常のように変換する状態,

$$\mathsf{T}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} \propto \Psi_{-\mathbf{p},-\sigma,n} \tag{2.C.13}$$

では, CP 演算子もまた通常のように,

$$\mathsf{CP}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} \propto \Psi_{-\mathbf{p},\sigma,n^c} \tag{2.C.14}$$

と作用する. これより, 演算子, $\mathsf{C} \equiv \mathsf{CPP}^{-1}$ は単に粒子と反粒子を交換することがわかる.

$$\mathsf{C}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,n} \propto \Psi_{\mathbf{p},\sigma,n^c}\ . \tag{2.C.15}$$

一方, T が通常でない表現(2.C.8) を持っているときには (2.C.11) から,

$$\mathsf{CP}\Psi_{\mathbf{p},\sigma,\pm} = e^{\mp i\phi/2}\Psi_{-\mathbf{p},\sigma,\mp^c} \tag{2.C.16}$$

となる. 特に, 状態$\Psi_\pm$ の (CPT で定義される) 反粒子が状態$\Psi_\mp$ になっていて, 添字 ±の縮退が粒子・反粒子の縮退と同一であることもある. この場合には, CP は粒子と反粒子を入替えないという変わった性質を持つ. これらの粒子に関する限り, CP と T は通常 P と CT と呼ばれるものと同じになる. これは単に定義の問題ではない. 他の粒子については CP と T は通常の作用をするからだ.

反転が変わった表現を持つ粒子は知られていない．したがって，これらの可能性はここではこれ以上追求しない．以下では，反転は 2.6 節で仮定したような通常の作用をするものとする．

問題

1. 観測者 $\mathcal{O}$ が W ボソン (スピン 1 で，質量は $m \neq 0$) を観測したら，運動量 $\mathbf{p}$ が y 方向でスピンの z 成分が σ であった．第 2 の観測者 $\mathcal{O}'$ は最初の観測者に対して z 方向の速度 $\mathbf{v}$ で動いている．観測者 $\mathcal{O}'$ には W の状態はどのように見えるか?

2. 観測者 $\mathcal{O}$ が光子を観測したら，光子は y 方向の運動量 $\mathbf{p}$ を持ち，偏極ベクトルが z 方向であった．第 2 の観測者 $\mathcal{O}'$ は最初の観測者に対して z 方向の速度 $\mathbf{v}$ で動いている．観測者 $\mathcal{O}'$ にはこの光子はどのように見えるか?

3. ガリレイ群の積の法則より，直接に (ローレンツ群の結果は使わずに) その生成子の交換関係を導け．群の生成子の再定義で消すことのできない中心電荷の最大集合を含めよ．

4. 演算子 $P_\mu P^\mu$ と $W_\mu W^\mu$ が全てのローレンツ変換の演算子 $U(\Lambda, a)$ と可換であることを示せ．ここで，$W_\mu \equiv \epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} J^{\nu\rho} P^\lambda$ だ．

5. 空間 2 次元で時間 1 次元の時空で，「ローレンツ群」$SO(2,1)$ のもとで不変な物理を考える．質量がゼロでない 1 粒子のスピン状態をどのように記述すればよいか? それらはローレンツ変換のもとでどのように振舞うか? また，反転 P と T についてはどうか?

6. 問題 5 と同じく，空間 2 次元で時間 1 次元の時空で，「ローレンツ群」$SO(2,1)$ のもとで不変な物理を考える．質量ゼロの 1 粒

子のスピン状態をどのように記述すればよいか? それらはローレンツ変換のもとでどのように振舞うか? また, 反転 P と T についてはどうか?

参考文献

1. P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, 第 4 版 (Oxford University Press, Oxford, 1958).

2. E. P. Wigner, *Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren* (Braunschweig, 1931) pp. 251–3 (英語訳は, Academic Press, Inc, New York, 1959). 質量ゼロの粒子については E. P. Wigner の *Theoretical Physics* (International Atomic Energy Agency, Vienna, 1963) p. 64 も見よ.

3. G. C. Wick, A. S. Wightman, and E. P. Wigner, *Phys. Rev.* **88**, 101 (1952).

3*a*. 例えば, S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972) 2.1 節を見よ.

4. E. Inönü and E. P. Wigner, *Nuovo Cimento* **IX**, 705 (1952).

5. E. P. Wigner, *Ann. Math.* **40**, 149 (1939).

6. G. W. Mackey, *Ann. Math.* **55**, 101 (1952); **58**, 193 (1953); *Acta. Math.* **99**, 265 (1958); *Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics* (Benjamin, New York, 1968).

7. 例えば, 以下の文献を見よ. A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, Princeton,

1957) 4 章; M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum* (John Wiley & Sons, New York, 1957) (ローズ著「角運動量の理論」山内 恭彦, 森田 正人 訳, みすず書房) IV 章; L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics – Non Relativistic Theory*, 第 3 版 (Pergamon Press, Oxford, 1977) (ランダウ・リフシッツ著「量子力学 1 = 非相対論的理論 =」, 好村 滋洋, 井上 健男, 佐々木 健 訳, 東京図書) 58 節; Wu-Ki Tung, *Group Theory in Physics* (World Scientific, Singapore, 1985) 7.3 節と 8.1 節.

8. T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **104**, 254 (1956); C. S. Wu *et al.*, *Phys. Rev.* **105**, 1413 (1957); R. Garwin, L. Lederman, and M. Weinrich, *Phys. Rev.* **105**, 1415 (1957); J. I. Friedman and V. L. Telegdi, *Phys. Rev.* **105**, 1681 (1957).

9. J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch, and R. Turlay, *Phys. Rev. Letters* **13**, 138 (1964).

10. H. A. Kramers, *Proc. Acad. Sci. Amsterdam* **33**, 959 (1930); F. J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3**, 140 (1962) も見よ.

11. V. Bargmann, *Ann. Math.* **59**, 1 (1954) 定理 7.1.

12. 例えば, 以下の文献がある. H. W. Turnbull and A. C. Aitken, *An Introduction to the Theory of Canonical Matrices* (Dover Publications, New York, 1961) p. 194.

13. 例えば, H. Flanders, *Differential Forms* (Academic Press, New York, 1963) (フランダース著「微分形式の理論」(岩波書店)) 3.6 節.

14. ホモトピー類と群の解説については, 例えば, 以下の文献がある. J. G. Hocking and G. S. Young, *Topology* (Addison-Wesley,

Reading, MA, 1961) 4 章; C. Nash and S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists* (Academic Press, London, 1983) 3 章と 5 章.

15. E. P. Wigner, *Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics*, F. Gürsey 編 (Gordon and Breach, New York, 1964) p. 37.

第 3 章

散乱理論

ここまでは, 前の章で述べた相対論的量子力学の一般原理を安定な 1 粒子状態のみに適用してきた. そのような 1 粒子状態自身はそれ程おもしろくはない. 何らかの興味ある事象が起こるのは, 2 個以上の粒子が相互作用する場合だけだ. しかし一般に実験は粒子の相互作用の事象の順序を詳細に追っていくわけではない. むしろ, 典型的な実験では (少なくとも核物理や素粒子物理では), 数個の粒子が巨視的な遠距離から相互に近づき, 微視的な小さい領域で相互作用し, 相互作用により生成された粒子がその後再び巨視的な遠距離に出て行く. 衝突の前後の物理的状態は実質上相互作用しないほど離れた粒子で構成されているので, 前の章で述べた 1 粒子状態の直積として記述できる. そのような実験では, 測定されるのは, 離れていて実質上相互作用しない始状態と終状態との間の遷移の確率分布または「断面積 (cross-section)」だけだ. この章ではこれらの確率と断面積の計算に用いる形式[1]について概説する.

3.1 「In」状態と「Out」状態

数個の相互作用していない粒子から成る状態は, 非斉次ローレンツ群のもとで 1 粒子状態の直積として変換するものと見なせる. 1 粒子状態を表示するのにその 4 元運動量 p^μ, スピンの z 成分 (質量ゼロ粒子の場合はヘリシティ) σ, また 2 種類以上の粒子を取り扱う場合は, 更に質量, スピン, 電荷等を含めた粒子の型を表す添字 n を用いる. 一般の変換則は

$$U(\Lambda,a)\Psi_{p_1,\sigma_1,n_1;p_2,\sigma_2,n_2;\cdots}=\exp\Big(-ia_\mu((\Lambda p_1)^\mu+(\Lambda p_2)^\mu+\cdots)\Big)$$
$$\times\sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0(\Lambda p_2)^0\cdots}{p_1^0p_2^0\cdots}}\sum_{\sigma_1'\sigma_2'\cdots}D^{(j_1)}_{\sigma_1'\sigma_1}\Big(W(\Lambda,p_1)\Big)D^{(j_2)}_{\sigma_2'\sigma_2}\Big(W(\Lambda,p_2)\Big)\cdots$$
$$\times\Psi_{\Lambda p_1,\sigma_1',n_1;\Lambda p_2,\sigma_2',n_2;\cdots} \tag{3.1.1}$$

だ. ここで $W(\Lambda,p)$ はウィグナーの回転 (2.5.10), また $D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(W)$ は 3 次元回転群の表現である通常の $(2j+1)$ 次元ユニタリー行列だ. (これは質量を持つ粒子の場合だ. 任意の質量ゼロ粒子の場合は, 行列 $D^{(j)}_{\sigma'\sigma}(W(\Lambda,p))$ は $\delta_{\sigma'\sigma}\exp(i\sigma\theta(\Lambda,p))$ で置き換わる. ここで θ は (2.5.43) で定義される角度だ.) 状態は (2.5.19) のように規格化される.

$$\left(\Psi_{p_1',\sigma_1',n_1';p_2',\sigma_2',n_2';\cdots}\,,\ \Psi_{p_1,\sigma_1,n_1;p_2,\sigma_2,n_2;\cdots}\right)$$
$$=\delta^3(\mathbf{p}_1'-\mathbf{p}_1)\delta_{\sigma_1'\sigma_1}\delta_{n_1'n_1}\delta^3(\mathbf{p}_2'-\mathbf{p}_2)\delta_{\sigma_2'\sigma_2}\delta_{n_2'n_2}\cdots$$
$$\pm\,[\text{置換}]\,. \tag{3.1.2}$$

ここで ± [置換] の項は粒子の型 $n_1', n_2', \cdots$ の入れ替えが粒子の型 $n_1, n_2, \cdots$ と同じになる可能性を考慮して付けてある. (4 章でより完全に述べるように, その符号はこの入れ替えが半整数スピン粒子の奇数回の入れ替えならば -1, それ以外は $+1$ だ. これはこの章の内容に関しては重要ではない.)

一つのギリシャ文字, 例えば α が $p_1, \sigma_1, n_1; p_2, \sigma_2, n_2; \cdots$ の全体を表す略記法をしばしば用いる. この記法では (3.1.2) は単に,

$$(\Psi_{\alpha'}, \Psi_\alpha) = \delta(\alpha' - \alpha) \tag{3.1.3}$$

と書かれる. ここで, $\delta(\alpha' - \alpha)$ は (3.1.2) の右辺に現れるデルタ関数とクロネッカー・デルタの積の和を表す. また, 状態和をとるとき,

$$\int d\alpha \cdots \equiv \sum_{n_1 \sigma_1 n_2 \sigma_2 \cdots} \int d^3p_1 \, d^3p_2 \cdots \tag{3.1.4}$$

と書く. 特に, (3.1.3) で規格化された状態の完全性は,

$$\Psi = \int d\alpha \; \Psi_\alpha (\Psi_\alpha, \Psi) \tag{3.1.5}$$

と表示する.

変換則 (3.1.1) は粒子が相互作用していない場合にのみ可能だ. $\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$ および $a^\mu = (0, 0, 0, \tau)$ とおくと, $U(\Lambda, a) = \exp(iH\tau)$ となり, (3.1.1) より Ψ_α はエネルギー固有状態,

$$H\Psi_\alpha = E_\alpha \Psi_\alpha \tag{3.1.6}$$

となる. ここで, エネルギーは 1 粒子のエネルギーの和,

$$E_\alpha = p_1^0 + p_2^0 + \cdots \tag{3.1.7}$$

に等しく, 相互作用項すなわち同時に 2 粒子以上を含む項はない.

他方, 変換則 (3.1.1) は散乱過程の時刻 $t \to \pm\infty$ で成り立つ. この章の最初に説明したように, 典型的な散乱実験は, 時刻 $t \to -\infty$ で粒子が十分離れていてまだ相互作用していない状態から出発して, $t \to +\infty$ で粒子が十分離れて相互作用しなくなる状態で終わる. だから (3.1.1) のように変換する状態は 1 組ではなく 2 組存在する. すなわち「in」状態 (in state) $\Psi_\alpha{}^+$ と「out」状態 (out state) $\Psi_\alpha{}^-$ は, それぞれ

$t \to -\infty$ または $t \to +\infty$ で観測すれば添字 α で表される粒子を含むことが見出される.*

この定義の枠組みに注意して欲しい. 明白なローレンツ不変性を保つため, ここで用いる形式では, 状態ベクトルは時間とともに変化しない. つまり状態ベクトル Ψ は粒子系の全時空にわたる履歴を記述する. (これは**ハイゼンベルグ表示** (Heisenberg picture) として知られており, 演算子は時間的に一定で状態の方が変化するシュレーディンガー表示とは異なる.) だから, $\Psi_\alpha{}^\pm$ は時間に依存する状態ベクトル $\Psi(t)$ の $t \to \mp\infty$ の極限だという言い方はしない.

しかし, 状態を定義する際, 観測者が系を観測する慣性系が暗に選択されている. すなわち, 異なる観測者は等価な状態ベクトルを見るのであり, 同じ状態ベクトルを見るわけではない. 特に, 標準的な観測者 $\mathcal{O}$ は衝突過程のある時刻が $t=0$ となるように時計を合わせるが, その観測者に対して静止している別の観測者 $\mathcal{O}'$ は時刻 $t'=0$ が $t=\tau$ になるように, つまり二人の観測者の時間座標が $t'=t-\tau$ となるように時刻を合わせた時計を用いるとする. このとき, 系が状態 Ψ にあることを $\mathcal{O}$ が観測すれば, $\mathcal{O}'$ はその系が状態 $U(1,-\tau)\Psi = \exp(-iH\tau)\Psi$ にあることを観測する. このように衝突のずっと前またはずっと後の状態がどうなっているかは, ($\mathcal{O}$ がどのような基底を採ろうとも) 時間推進演算子 $\exp(-iH\tau)$ をかけて, それぞれ $\tau \to -\infty$ あるいは $\tau \to +\infty$ をとれば分かる. もちろん, 状態が実際にエネルギー固有状態ならば, その状態は時間に真に依存せず, 演算子 $\exp(-iH\tau)$ は重要でない位相因子 $\exp(-iE_\alpha\tau)$ を与えるだけだ. したがって, 波束, すなわち, 状態の重ね合わせ $\int d\alpha\, g(\alpha)\Psi_\alpha$ でその振幅 $g(\alpha)$ がエネルギーのある有限の範囲 ΔE にわたってゼロでなく滑らかに変化するようにとったものを考えねばならない. 「in」状態と「out」状態は重ね合

* 「in」状態と「out」状態をそれぞれ表す添字「+」と「−」は逆に見えるかもしれないが, それは慣例になっているようだ. それは(3.1.16)の符号から来ている.

わせ,

$$\exp(-iH\tau)\int d\alpha\, g(\alpha)\Psi_\alpha{}^\pm = \int d\alpha\, e^{-iE_\alpha\tau}g(\alpha)\Psi_\alpha{}^\pm$$

がそれぞれ $\tau \ll -1/\triangle E$ あるいは $\tau \gg +1/\triangle E$ で対応する自由粒子状態の重ね合わせになるように定義する.

話を具体的にするため, 時間推進演算子 H は自由粒子のハミルトニアン H_0 と相互作用部分 V の二つに分解でき,

$$H = H_0 + V\,, \tag{3.1.8}$$

H_0 はハミルトニアン全体の固有状態 Ψ_α^+ および Ψ_α^- と同じに見える固有状態 Φ_α を持つとする.

$$H_0\Phi_\alpha = E_\alpha\Phi_\alpha\,, \tag{3.1.9}$$

$$(\Phi_{\alpha'}, \Phi_\alpha) = \delta(\alpha' - \alpha)\,. \tag{3.1.10}$$

ここで H_0 は全体のハミルトニアン H と同じスペクトルを持つと仮定していることに注意せよ. このため, H_0 に現れる質量は実際に測定される物理的な質量であり, H に現れる「裸の」質量項と必ずしも同じではない. つまりその間に差があれば, それは H_0 ではなく相互作用 V に含まれねばならない. また, H のスペクトル中の任意の束縛状態は H_0 の中にあたかも素粒子** であるかのように入れておかねばならない.

「in」状態と「out」状態は, H_0 ではなく H の固有状態と定義でき,

$$H\Psi_\alpha{}^\pm = E_\alpha\Psi_\alpha{}^\pm \tag{3.1.11}$$

**あるいは, 非相対論的な問題では H_0 に束縛ポテンシャルを入れても良い. この方法を, 束縛状態が始状態には現れて終状態には現れないかまたはその逆である「組替え衝突」に適用するときは, H を H_0 と V に分離する仕方を始状態と終状態で異なる形に採らねばならない.

となる. それらは $\tau \to -\infty$ または $\tau \to +\infty$ で, それぞれ次の条件を満たす.

$$\int d\alpha\, e^{-iE_\alpha \tau} g(\alpha) \Psi_\alpha{}^{\pm} \to \int d\alpha\, e^{-iE_\alpha \tau} g(\alpha) \Phi_\alpha\,. \tag{3.1.12}$$

(3.1.12) は, $\tau \to -\infty$ または $\tau \to +\infty$ で, それぞれ,

$$\exp(-iH\tau) \int d\alpha\, g(\alpha) \Psi_\alpha{}^{\pm} \to \exp(-iH_0\tau) \int d\alpha\, g(\alpha) \Phi_\alpha$$

という要求として書き直せる. これは「in」状態と「out」状態の公式として,

$$\Psi_\alpha{}^{\pm} = \Omega(\mp\infty)\Phi_\alpha \tag{3.1.13}$$

と書き直されることもある. ここで,

$$\Omega(\tau) \equiv \exp(+iH\tau)\exp(-iH_0\tau) \tag{3.1.14}$$

だ. しかし, (3.1.13) の $\Omega(\mp\infty)$ はエネルギー固有状態の滑らかな重ね合わせにかかったときのみ意味のある結果を与えることに留意すべきだ.

定義 (3.1.12) から直ちに結論されるのは, 「in」状態と「out」状態が自由粒子状態と全く同じに規格化されていることだ. これを見るには, (3.1.12) の左辺はユニタリー演算子 $\exp(-iH\tau)$ を時間に依存しない状態にかけて得られるので, そのノルムは時間に依存せず, よって $\tau \to \infty$ の極限のノルム, すなわち (3.1.12) の右辺のノルムに等しい.

$$\int d\alpha\, d\beta\ \exp(-i(E_\alpha - E_\beta)\tau) g(\alpha) g^*(\beta) (\Psi_\beta{}^{\pm}, \Psi_\alpha{}^{\pm})$$
$$= \int d\alpha\, d\beta\ \exp(-i(E_\alpha - E_\beta)\tau) g(\alpha) g^*(\beta) (\Phi_\beta, \Phi_\alpha)\,.$$

このことは全ての滑らかな関数 $g(\alpha)$ について正しいと考えられるので, スカラー積は,

$$(\Psi_\beta{}^{\pm}, \Psi_\alpha{}^{\pm}) = (\Phi_\beta, \Phi_\alpha) = \delta(\beta - \alpha) \tag{3.1.15}$$

に等しいはずだ.

条件 (3.1.12) を満たすエネルギー固有値方程式 (3.1.11) の具体的なしかし形式的な解を求めておくのは目的によっては有益だ. このために (3.1.11) を,

$$(E_\alpha - H_0)\Psi_\alpha{}^\pm = V\Psi_\alpha{}^\pm$$

と書く. 演算子 $E_\alpha - H_0$ は可逆ではない. すなわち, それは自由粒子状態 Φ_α ばかりでなく同じエネルギーをもつ連続な他の自由粒子状態 Φ_β も消す. 「in」状態と「out」状態は $V \to 0$ でちょうど Φ_α になるので, 形式的な解を, とりあえず V に比例する項を Φ_α に加えて,

$$\Psi_\alpha{}^\pm = \Phi_\alpha + (E_\alpha - H_0 \pm i\epsilon)^{-1} V\Psi_\alpha{}^\pm \tag{3.1.16}$$

と書き, さらに, 自由粒子状態の完全系で展開して,

$$\Psi_\alpha{}^\pm = \Phi_\alpha + \int d\beta\, \frac{T_{\beta\alpha}{}^\pm\, \Phi_\beta}{E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon}\,, \tag{3.1.17}$$

$$T_{\beta\alpha}{}^\pm \equiv (\Phi_\beta, V\Psi_\alpha{}^\pm) \tag{3.1.18}$$

と書く. ここで, ϵ は正の微小量で, $E_\alpha - H_0$ の逆演算子に意味を持たせるために挿入してある. これらは**リップマン・シュウィンガー方程式** (Lippmann-Schwinger equation) [1a]として知られている. 次節の終わりで「in」状態および「out」状態の直交性の少し厳密な証明をするときに (3.1.17) を用いる.

分母に $+i\epsilon$ または $-i\epsilon$ がついている (3.1.17) は, それぞれ「in」状態と「out」状態の条件 (3.1.12) を満たすことを示すことが残っている. このために, 以下の重ね合わせを考えよう.

$$\Psi_g{}^\pm(t) \equiv \int d\alpha\, e^{-iE_\alpha t} g(\alpha)\Psi_\alpha{}^\pm\,, \tag{3.1.19}$$

$$\Phi_g(t) \equiv \int d\alpha\, e^{-iE_\alpha t} g(\alpha)\Phi_\alpha\,. \tag{3.1.20}$$

この $\Psi_g{}^+(t)$ と $\Psi_g{}^-(t)$ がそれぞれ $t\to-\infty$ と $t\to+\infty$ で $\Phi_g(t)$ に近づくことを示す. (3.1.17) を (3.1.19) 中で用いると,

$$\Psi_g{}^{\pm}(t)=\Phi_g(t)+\int d\alpha\int d\beta\,\frac{e^{-iE_\alpha t}g(\alpha)T_{\beta\alpha}{}^{\pm}\Phi_\beta}{E_\alpha-E_\beta\pm i\epsilon} \tag{3.1.21}$$

となる. 積分の順序を気にせずに入れ替えて, まず積分,

$$\mathcal{I}_\beta{}^{\pm}\equiv\int d\alpha\,\frac{e^{-iE_\alpha t}g(\alpha)T_{\beta\alpha}{}^{\pm}}{E_\alpha-E_\beta\pm i\epsilon}$$

を考えよう. $t\to-\infty$ では, エネルギー変数 E_α の積分路を上半面の大きな半円で閉じさせる. この半円からの寄与は因子 $\exp(-iE_\alpha t)$ のために $t\to-\infty$ かつ $\mathrm{Im}\,E_\alpha>0$ では指数関数的に小さくなって消える. すると積分は上半面の被積分関数の特異点の和で与えられる. 関数 $g(\alpha)$ と $T_{\beta\alpha}{}^{\pm}$ は一般に, 有限で虚部が正の E_α の値で何らかの特異点を持つと期待されるが, 大きな半円に対してと同様にそれらの寄与は $t\to-\infty$ で指数関数的にゼロになる. (特に, 波束 $g(\alpha)$ の時間に関する不確定性と衝突の継続時間はそれぞれ $g(\alpha)$ と $T_{\beta\alpha}{}^{\pm}$ の複素 E_α 面内での特異点の位置を決めるが, $-t$ はその両方よりずっと大きくなければならない.) この結果 ($E_\alpha-E_\beta\pm i\epsilon)^{-1}$ の特異点が残り, それは $\mathcal{I}_\beta{}^-$ については上半面上にあるが, $\mathcal{I}_\beta{}^+$ については上半面上にはない. こうして $\mathcal{I}_\beta{}^+$ は $t\to-\infty$ でゼロになるという結論が得られる. 同様に, $t\to+\infty$ では積分路は下半面で閉じさせねばならず, $\mathcal{I}_\beta{}^-$ がこの極限でゼロになる. 結局, $\Psi_g{}^{\pm}(t)$ は, 定義の条件式 (3.1.12) のとおり $t\to\mp\infty$ で $\Phi_g(t)$ に近づく.

* * *

将来使うことを考慮して, (3.1.17) の因子 $(E_\alpha-E_\beta\pm i\epsilon)^{-1}$ の便利な表現を与えておく. 一般に,

$$(E\pm i\epsilon)^{-1}=\frac{\mathcal{P}_\epsilon}{E}\mp i\pi\delta_\epsilon(E) \tag{3.1.22}$$

と書ける. ここで,

$$\frac{\mathcal{P}_\epsilon}{E} \equiv \frac{E}{E^2+\epsilon^2}\ , \tag{3.1.23}$$

$$\delta_\epsilon(E) \equiv \frac{\epsilon}{\pi(E^2+\epsilon^2)} \tag{3.1.24}$$

だ. 関数 (3.1.23) は $|E| \gg \epsilon$ ではちょうど $1/E$ であり, $E \to 0$ でゼロになるので, $\epsilon \to 0$ では「主値関数 (principal value function)」 $\mathcal{P}/E$ のように振舞う. これは $E=0$ 近傍の微小な間隔を除くことにより, E の任意の滑らかな関数と $1/E$ の積の積分に意味を持たせている. 関数 (3.1.24) は $|E| \gg \epsilon$ で ϵ の大きさであり, E の全領域にわたって積分すると 1 になるので, $\epsilon \to 0$ の極限でちょうどデルタ関数 $\delta(E)$ のように振舞う. こう理解することにすれば, (3.1.22) の添字 ϵ は落として単に,

$$(E \pm i\epsilon)^{-1} = \frac{\mathcal{P}}{E} \mp i\pi\delta(E) \tag{3.1.25}$$

と書ける.

3.2 S 行列

実験家は一般に特定の粒子から成る状態を $t \to -\infty$ で用意し, $t \to +\infty$ でこの状態がどう見えるかを測定する. もし用意された状態が $t \to -\infty$ で粒子の内容として α を持つなら, それは「in」状態 ${\Psi_\alpha}^+$ だ. また, $t \to +\infty$ に粒子の内容 β を持つことが見出されれば, それは「out」状態 ${\Psi_\beta}^-$ だ. したがって, 遷移 $\alpha \to \beta$ の確率振幅はスカラー積,

$$S_{\beta\alpha} = ({\Psi_\beta}^-, {\Psi_\alpha}^+) \tag{3.2.1}$$

だ. この複素振幅の配列は S 行列 (S-matrix) として知られている.[2] もし相互作用がなければ「in」状態と「out」状態は同じになり, $S_{\beta\alpha}$ はちょうど $\delta(\alpha-\beta)$ となる. したがって, 反応 $\alpha \to \beta$ の確率は

$|S_{\beta\alpha} - \delta(\alpha - \beta)|^2$ に比例する. $S_{\beta\alpha}$ が, 測定される反応率や断面積とどう関係しているかは 3.4 節で詳しく見る.

「in」状態と「out」状態は二つの異なるヒルベルト空間に存在するわけではない. 両者の違いはラベルの付け方, すなわち $t \to -\infty$ でどう見えるか, あるいは $t \to +\infty$ でどう見えるかの違いだけだ. 任意の「in」状態は「out」状態の和で展開でき, その展開係数は S 行列 (3.2.1) で与えられる.

$S_{\beta\alpha}$ は直交する状態の 2 組の完全系を結ぶ行列なので, ユニタリーでなければならない. この事をより詳細に見るために, 完全性の関係 (3.1.5) を「out」状態に適用し,

$$\int d\beta\ S^*_{\beta\gamma} S_{\beta\alpha} = \int d\beta\ ({\Psi_\gamma}^+, {\Psi_\beta}^-)({\Psi_\beta}^-, {\Psi_\alpha}^+) = ({\Psi_\gamma}^+, {\Psi_\alpha}^+)$$

と書く. (3.1.15) を用いるとこれは,

$$\int d\beta\ S^*_{\beta\gamma} S_{\beta\alpha} = \delta(\gamma - \alpha) \tag{3.2.2}$$

あるいは, 短く書いて $S^\dagger S = 1$ を与える. 同様に, 「in」状態の完全性は,

$$\int d\beta\ S_{\gamma\beta} {S_{\alpha\beta}}^* = \delta(\gamma - \alpha) \tag{3.2.3}$$

すなわち $SS^\dagger = 1$ を与える.*

S 行列を扱う代わりに, 自由粒子状態間の行列要素が S 行列の対応する要素に等しくなるように, すなわち,

$$(\Phi_\beta, S\Phi_\alpha) \equiv S_{\beta\alpha} \tag{3.2.4}$$

となるように定義された演算子 S を扱った方が便利なことがしばしばある. 「in」状態と「out」状態の具体的だがきわめて形式的な表現

*別な証明をこの節の終わりで与える. 無限次元「行列」についてはユニタリー条件 $S^\dagger S$ =1 と $SS^\dagger = 1$ は同等ではないことに留意せよ.

(3.1.13) は S 演算子の一つの公式,

$$S = \Omega(\infty)^\dagger \Omega(-\infty) = U(+\infty, -\infty) \tag{3.2.5}$$

を与える. ここで,

$$U(\tau, \tau_0) \equiv \Omega(\tau)^\dagger \Omega(\tau_0) = \exp(iH_0\tau)\exp(-iH(\tau-\tau_0))\exp(-iH_0\tau_0) \tag{3.2.6}$$

だ. この公式は, 次節で S 行列のローレンツ不変性を調べたり, 3.5 節で時間に依存する摂動論の S 行列の公式を導くのに使われる.

前節の方法は S 行列の有用な別の公式を導くのに使える. 「in」状態 Ψ^+ の式 (3.1.21) に戻って, 今度は $t \to +\infty$ と採ろう. すると E_α の積分路は E_α の下半面で閉じなければならない. このとき, ${T_{\beta\alpha}}^+$ と $g(\alpha)$ の特異点は以前と同様 $t \to +\infty$ で寄与しないが, 今度は正則でない因子 $(E_\alpha - E_\beta + i\epsilon)^{-1}$ からの寄与を拾う. 積分路は $E_\alpha = -\infty$ から $E_\alpha = +\infty$ まで走り, つぎに下半面の大きな半円を通って $E_\alpha = -\infty$ に戻るので, 特異点を時計回りに回ることになる. 留数の方法により, これの E_α 積分への寄与は, $E_\alpha = E_\beta - i\epsilon$ での被積分関数の値に因子 $-2i\pi$ をかけたもので与えられる. すなわち, $\epsilon \to 0+$ の極限で, $t \to +\infty$ ととると, (3.1.21) の α 積分は,

$$\mathcal{I}_\beta{}^+ \to -2i\pi e^{-iE_\beta t} \int d\alpha\, \delta(E_\alpha - E_\beta) g(\alpha) T_{\beta\alpha}{}^+$$

という漸近的振舞いをし, よって, $t \to +\infty$ で,

$$\Psi_g{}^+(t) \to \int d\beta\, e^{-iE_\beta t} \Phi_\beta \Big[g(\beta) - 2i\pi \int d\alpha\, \delta(E_\alpha - E_\beta) g(\alpha) T_{\beta\alpha}{}^+ \Big]$$

となる. 一方 $\Psi_g{}^+$ の式 (3.1.19) を「out」状態の完全系で展開すると,

$$\Psi_g{}^+(t) = \int d\alpha\, e^{-iE_\alpha t} g(\alpha) \int d\beta\, \Psi_\beta{}^-\ S_{\beta\alpha}$$

が得られる. $S_{\beta\alpha}$ は $\delta(E_\beta - E_\alpha)$ の因子を含むので, これは,

$$\Psi_g{}^+(t) = \int d\beta\, \Psi_\beta{}^-\, e^{-iE_\beta t} \int d\alpha\, g(\alpha) S_{\beta\alpha}$$

と書き直すことができ,「out」状態を定義している性質 (3.1.12) を用いると, これは $t \to +\infty$ で,

$$\Psi_g{}^+(t) \to \int d\beta\, \Phi_\beta\, e^{-iE_\beta t} \int d\alpha\, g(\alpha) S_{\beta\alpha}$$

という漸近的振舞いを持つことがわかる. これと, 先程の結果を比較して,

$$\int d\alpha\, g(\alpha) S_{\beta\alpha} = g(\beta) - 2i\pi \int d\alpha\, \delta(E_\alpha - E_\beta) g(\alpha) T_{\beta\alpha}{}^+ ,$$

言い換えれば,

$$S_{\beta\alpha} = \delta(\beta - \alpha) - 2i\pi\delta(E_\alpha - E_\beta) T_{\beta\alpha}{}^+ \tag{3.2.7}$$

が得られる.

これは S 行列の簡単な近似を示唆する. すなわち, 相互作用 V が弱い場合, (3.1.18) の「in」状態と自由粒子状態の差は無視でき, その場合 (3.2.7) から,

$$S_{\beta\alpha} \simeq \delta(\beta - \alpha) - 2i\pi\delta(E_\alpha - E_\beta)(\Phi_\beta, V\Phi_\alpha) \tag{3.2.8}$$

が得られる. これはボルン近似 (Born approximation) [3]として知られている. 高次項は 3.5 節で説明する.

＊＊＊

「in」状態と「out」状態に関するリップマン・シュウィンガー方程式 (3.1.16) を使えば, (3.2.7) ばかりでなく, これらの状態の正規直交性と S 行列のユニタリー性を, $t \to \mp\infty$ の極限を考えなくても証明できる.[4] まず, (3.1.16) を行列要素 $(\Psi_\beta^\pm, V\Psi_\alpha^\pm)$ の左側または右側に用いて, それらの結果を等しいとおくと,

$$\begin{aligned}(\Psi_\beta{}^\pm, V\Phi_\alpha) &+ (\Psi_\beta{}^\pm, V(E_\alpha - H_0 \pm i\epsilon)^{-1} V\Psi_\alpha{}^\pm) \\ &= (\Phi_\beta, V\Psi_\alpha{}^\pm) + (\Psi_\beta{}^\pm, V(E_\beta - H_0 \mp i\epsilon)^{-1} V\Psi_\alpha{}^\pm)\end{aligned}$$

がわかる. 中間状態の完全系 Φ_γ について和をとると,

$$T_{\alpha\beta}{}^{\pm\star} - T_{\beta\alpha}{}^{\pm} = -\int d\gamma\, T_{\gamma\beta}{}^{\pm\star} T_{\gamma\alpha}{}^{\pm} \times \left([E_\alpha - E_\gamma \pm i\epsilon]^{-1} - [E_\beta - E_\gamma \mp i\epsilon]^{-1}\right) \tag{3.2.9}$$

が得られる.「in」状態および「out」状態の正規直交性を証明するには, (3.2.9) を $E_\alpha - E_\beta \pm 2i\epsilon$ で割る. これは,

$$\left(\frac{T_{\alpha\beta}{}^{\pm}}{E_\beta - E_\alpha \pm 2i\epsilon}\right)^{\star} + \frac{T_{\beta\alpha}{}^{\pm}}{E_\alpha - E_\beta \pm 2i\epsilon} = -\int d\gamma \left(\frac{T_{\gamma\beta}{}^{\pm}}{E_\beta - E_\gamma \pm i\epsilon}\right)^{\star} \frac{T_{\gamma\alpha}{}^{\pm}}{E_\alpha - E_\gamma \pm i\epsilon}$$

を与える. 左辺の分母の 2ϵ は, これが正の微小量だということだけが重要なので, ϵ で置き換えて良い. すると, $\delta(\beta-\alpha)+T_{\beta\alpha}{}^{\pm}/(E_\alpha - E_\beta \pm i\epsilon)$ がユニタリーであることが分かる. (3.1.17) を用いると, これはちょうど $\Psi_\alpha{}^{\pm}$ が状態ベクトルの 2 組の直交系を成すということだ. S 行列のユニタリー性は (3.2.9) に $(E_\alpha - E_\beta \pm 2i\epsilon)^{-1}$ の代わりに $\delta(E_\beta - E_\alpha)$ をかけて同様に証明できる.

3.3 S 行列の対称性

この節では, 様々な対称性のもとでの S 行列の不変性が意味する事柄だけでなく, どのような条件をハミルトニアンに課すとそのような不変性が保証されるのかも考察する.

ローレンツ不変性

任意の固有順時ローレンツ変換 $x \to \Lambda x + a$ に対して, ユニタリー演算子 $U(\Lambda, a)$ を (3.1.1) のように「in」状態または「out」状態のどちらかに作用するとして定義することができる. 理論がローレンツ不変だというとき, それは同じ演算子 $U(\Lambda, a)$ が (3.1.1) のよう

に「in」状態および「out」状態の両方に作用することを意味する. 演算子 $U(\Lambda, a)$ はユニタリーなので,

$$S_{\beta\alpha} = \left(\Psi_\beta{}^-, \Psi_\alpha{}^+\right) = \left(U(\Lambda, a)\Psi_\beta{}^-, U(\Lambda, a)\Psi_\alpha{}^+\right)$$

と書くことができ, よって (3.1.1) を用いると, S 行列のローレンツ不変性 (実際には共変性) が得られる. すなわち, 任意のローレンツ変換 $\Lambda^\mu{}_\nu$ と並進 a^μ に対して,

$$\begin{aligned}
&S_{p_1', \sigma_1', n_1'; p_2', \sigma_2', n_2'; \cdots ,\; p_1, \sigma_1, n_1;\; p_2, \sigma_2, n_2; \cdots} \\
&= \exp\left(i a_\mu (p_1{}^\mu + p_2{}^\mu + \cdots - p_1'^\mu - p_2'^\mu - \cdots)\right) \\
&\quad \times \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0 (\Lambda p_2)^0 \cdots (\Lambda p_1')^0 (\Lambda p_2')^0 \cdots}{p_1^0 p_2^0 \cdots \;\; p_1'^0 p_2'^0 \cdots}} \\
&\quad \times \sum_{\bar\sigma_1 \bar\sigma_2 \cdots} D^{(j_1)}_{\bar\sigma_1 \sigma_1}\left(W(\Lambda, p)\right) D^{(j_2)}_{\bar\sigma_2 \sigma_2}\left(W(\Lambda, p_2)\right) \cdots \\
&\quad \times \sum_{\bar\sigma_1' \bar\sigma_2' \cdots} D^{(j_1')*}_{\bar\sigma_1' \sigma_1'}\left(W(\Lambda, p_1')\right) D^{(j_2')*}_{\bar\sigma_2' \sigma_2'}\left(W(\Lambda, p_2')\right) \cdots \\
&\quad \times S_{\Lambda p_1', \bar\sigma_1', n_1'; \Lambda p_2', \bar\sigma_2', n_2'; \cdots ,\; \Lambda p_1, \bar\sigma_1, n_1; \Lambda p_2, \bar\sigma_2, n_2; \cdots}
\end{aligned} \tag{3.3.1}$$

だ. (プライムは終状態の粒子を始状態の粒子と区別するために, また, 棒線は和をとる変数を区別するために用いている.) 特に, 左辺は a^μ に依らないので, 右辺も a^μ に依らないはずで, よって S 行列は, 4 元運動量が保存しなければゼロだ. だから, S 行列の粒子間の相互作用を表す部分は,

$$S_{\beta\alpha} - \delta(\beta - \alpha) = -2\pi i\, M_{\beta\alpha} \delta^4(p_\beta - p_\alpha) \tag{3.3.2}$$

の形で書ける. (しかし, 次の章で見るように振幅 $M_{\beta\alpha}$ 自身は他のデルタ関数因子を含む項を持つ.)

(3.3.1) は定理というより, S 行列のローレンツ不変性の定義と見なせる. なぜなら, 「in」状態と「out」状態の両方に (3.1.1) のように作

用するユニタリー演算子が存在するのは, 特別なハミルトニアンに対してのみだからだ. したがって S 行列のローレンツ不変性を保証するためのハミルトニアンに対する条件を定式化する必要がある. このためには, (3.2.4) で定義された演算子 S,

$$S_{\beta\alpha} = (\Phi_\beta, S\Phi_\alpha)$$

を考えるのが便利だ. 2 章で定義したように, 自由粒子状態 Φ_α は非斉次ローレンツ群の表現を与えるので, これらの状態に (3.1.1) の変換,

$$\begin{aligned} U_0(\Lambda,a)\Phi_{p_1,\sigma_1,n_1;\,p_2,\sigma_2,n_2;\,\cdots} &= \exp\Big(-ia_\mu(p_1^\mu + p_2^\mu + \cdots)\Big) \\ &\times \sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0(\Lambda p_2)^0\cdots}{p_1^0 p_2^0\cdots}} \sum_{\sigma_1'\sigma_2'\cdots} D^{(j_1)}_{\sigma_1'\sigma_1}\Big(W(\Lambda,p_1)\Big) D^{(j_2)}_{\sigma_2'\sigma_2}\Big(W(\Lambda,p_2)\Big)\cdots \\ &\times \Phi_{\Lambda p_1,\sigma_1',n_1;\,\Lambda p_2,\sigma_2',n_2;\,\cdots} \end{aligned}$$

を引き起こすユニタリー演算子 $U_0(\Lambda, a)$ を常に定義できる. このユニタリー演算子が S 演算子と,

$$U_0(\Lambda,a)^{-1} S\, U_0(\Lambda,a) = S$$

のように交換するなら (3.3.1) は成り立つ. この条件は微小ローレンツ変換で表現することもできる. 2.4 節と全く同様に, 1 組のエルミート演算子, すなわち運動量 $\mathbf{P}_0$, 角運動量 $\mathbf{J}_0$, ブースト生成子 $\mathbf{K}_0$ が存在し, それらは H_0 とともに自由粒子状態に作用したときに微小非斉次ローレンツ変換を生成する. (3.3.1) は, S 行列がそのような変換の影響を受けない, 言い換えれば, S 演算子はこれらの生成子と交換するということと同等だ.

$$[H_0, S] = [\mathbf{P}_0, S] = [\mathbf{J}_0, S] = [\mathbf{K}_0, S] = 0. \qquad (3.3.3)$$

演算子 H_0, $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{J}_0$, および $\mathbf{K}_0$ は Φ_α の微小非斉次ローレンツ変換を生成するので, それらは自動的に交換関係 (2.4.18)–(2.4.24) を満足

する.

$$[J_0^i, J_0^j] = i\,\epsilon_{ijk} J_0^k \;, \tag{3.3.4}$$

$$[J_0^i, K_0^j] = i\,\epsilon_{ijk} K_0^k \;, \tag{3.3.5}$$

$$[K_0^i, K_0^j] = -i\,\epsilon_{ijk} J_0^k \;, \tag{3.3.6}$$

$$[J_0^i, P_0^j] = i\,\epsilon_{ijk} P_0^k \;, \tag{3.3.7}$$

$$[K_0^i, P_0^j] = iH_0\delta_{ij} \;, \tag{3.3.8}$$

$$[J_0^i, H_0] = [P_0^i, H_0] = [P_0^i, P_0^j] = 0 \;, \tag{3.3.9}$$

$$[K_0^i, H_0] = i\,P_0^i \;, \tag{3.3.10}$$

ここで, i, j, k 等は値 1 , 2 , 3 をとり, ϵ_{ijk} は完全反対称量で $\epsilon_{123} = +1$ だ.

同様にして, 全ハミルトニアン H とともに, 例えば「in」状態に変換 (3.1.1) を生成する「正確な生成子」の組 **P**, **J**, **K** を定義できる. (すでに述べたとおり, これらの演算子が同じ変換を「out」状態に引き起こすことは自明ではない.) 群の構造よりこれらの正確な生成子が同じ交換関係,

$$[J^i, J^j] = i\,\epsilon_{ijk} J^k \;, \tag{3.3.11}$$

$$[J^i, K^j] = i\,\epsilon_{ijk} K^k \;, \tag{3.3.12}$$

$$[K^i, K^j] = -i\,\epsilon_{ijk} J^k \;, \tag{3.3.13}$$

$$[J^i, P^j] = i\,\epsilon_{ijk} P^k \;, \tag{3.3.14}$$

$$[K^i, P^j] = iH\delta_{ij} \;, \tag{3.3.15}$$

$$[J^i, H] = [P^i, H] = [P^i, P^j] = 0 \;, \tag{3.3.16}$$

$$[K^i, H] = i\,P^i \tag{3.3.17}$$

を満たすことがわかる. 事実上, 全ての既知の場の理論において, 相互作用の効果は相互作用項 V をハミルトニアンに付け加えることだけ

であり, 運動量や角運動量を変えない.

$$H = H_0 + V \ , \qquad \mathbf{P} = \mathbf{P}_0 \ , \qquad \mathbf{J} = \mathbf{J}_0 \, . \tag{3.3.18}$$

(唯一の例外として知られているのは, 磁気モノポールのように位相的にねじれた場 (topologically twisted field) を含む理論だ. この場合は状態の角運動量が相互作用に依存する.) 相互作用項が自由粒子の運動量および角運動量演算子と,

$$[V, \mathbf{P}_0] = [V, \mathbf{J}_0] = 0 \tag{3.3.19}$$

のように交換すれば, (3.3.18) は, 交換関係 (3.3.11), (3.3.14) および (3.3.16) が満たされることを意味している. リップマン・シュウィンガー方程式 (3.1.16) あるいはそれと同等な (3.1.13) から,「in」状態 (と「out」状態) に作用するとき並進と回転を生成する演算子は実際, 単に $\mathbf{P}_0$ と $\mathbf{J}_0$ だということが容易にわかる. また, $\mathbf{P}_0$ と $\mathbf{J}_0$ は (3.2.6) で定義された演算子 $U(t, t_0)$ と交換し, よって S 演算子 $U(\infty, -\infty)$ と交換することも容易にわかる. さらに, (3.2.7) の 2 項ともにエネルギー保存のデルタ関数があるので, S 演算子が H_0 と交換することもすでに知っている. これより, あと S 演算子と交換することを示す必要があるのはブースト生成子 $\mathbf{K}_0$ だけだ.

他方, ブースト生成子 $\mathbf{K}$ を自由粒子のブースト生成子 $\mathbf{K}_0$ と等しくおくことは不可能だ. なぜなら, そうすると (3.3.15) と (3.3.8) から $H = H_0$ となり, それは相互作用がある場合には確かに正しくない. このように相互作用 V を H_0 に付け加えると, 同時にブースト生成子に補正 $\mathbf{W}$ を加えなければならない.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \mathbf{W}. \tag{3.3.20}$$

残った交換関係のうち (3.3.17) に注目すると, それは,

$$[\mathbf{K}_0, V] = -[\mathbf{W}, H] \tag{3.3.21}$$

という形に書ける. 条件 (3.3.21) はそれだけでは意味がない. なぜなら, 任意の V について, H の固有状態 Ψ_α と Ψ_β との間の $\mathbf{W}$ の行列要素を $-(\Psi_\beta, [\mathbf{K}_0, V]\Psi_\alpha)/(E_\beta - E_\alpha)$ と与えることで, 常に $\mathbf{W}$ を定義できるからだ. 理論のローレンツ不変性の重要な点は, (3.3.11)–(3.3.17) を満たす正確な生成子の組が存在しなければならないということではなく, これらの生成子が「in」状態と「out」状態に同じように作用しなければならないということだ. つまり, 単に (3.3.21) を満たす演算子 $\mathbf{K}$ を見付けるだけでは不十分だ. (3.3.21) は, $\mathbf{W}$ の行列要素がエネルギーの滑らかな関数であり, 特に $(E_\beta - E_\alpha)^{-1}$ という形の特異点を持たないという要求を加えると意味を持ってくる. (3.3.21) は, $\mathbf{W}$ の適当な滑らかさの条件が加われば, 残っているローレンツ不変性の条件 $[\mathbf{K}_0, S] = 0$ を意味することを示そう.

これを証明するために, $\mathbf{K}_0$ と (3.2.6) で定義される演算子 $U(t, t_0)$ の交換子を有限の t と t_0 について考えよう. (3.3.10) と $\mathbf{P}_0$ が H_0 と交換する事実から,

$$[\mathbf{K}_0, \exp(iH_0t)] = -t\mathbf{P}_0 \exp(iH_0t)$$

が得られ, 一方 (3.3.21)(これは (3.3.17) と同等だ) から,

$$[\mathbf{K}, \exp(iHt)] = -t\mathbf{P} \exp(iHt) = -t\mathbf{P}_0 \exp(iHt)$$

が得られる. すると運動量演算子は $\mathbf{K}_0$ と U の交換子において相殺するので,

$$[\mathbf{K}_0, U(\tau, \tau_0)] = -\mathbf{W}(\tau)U(\tau, \tau_0) + U(\tau, \tau_0)\mathbf{W}(\tau_0) \tag{3.3.22}$$

となる. ここで,

$$\mathbf{W}(t) \equiv \exp(iH_0t)\mathbf{W} \exp(-iH_0t) \tag{3.3.23}$$

だ. もし, H_0 の固有状態間の $\mathbf{W}$ の行列要素がエネルギーの十分に滑らかな関数ならば, エネルギー固有状態の滑らかな重ね合わせ間

の $\mathbf{W}(t)$ の行列要素は $t \to \pm\infty$ でゼロになり, よって (3.3.22) は結果的に,

$$0 = [\mathbf{K}_0, U(\infty, -\infty)] = [\mathbf{K}_0, S] \tag{3.3.24}$$

を与える. これが示したかった本質的な結果だ. すなわち, (3.3.21) と, $t \to \pm\infty$ で $\mathbf{W}(t)$ がゼロになることを保証する $\mathbf{W}$ の行列要素の滑らかさの条件は, S 行列のローレンツ不変性の十分条件を構成する. この滑らかさの条件は自然なものだ. なぜなら, まさに S 行列の考え方を正当化するためには $V(t)$ が $t \to \pm\infty$ でゼロになることが要求されるが, そのために必要な V の行列要素の条件にこの条件は非常に似ているからだ.

また, (3.3.22) を $\tau = 0$ および $\tau_0 = \mp\infty$ で用いて,

$$\mathbf{K}\Omega(\mp\infty) = \Omega(\mp\infty)\mathbf{K}_0 \tag{3.3.25}$$

を示すことができる. ここで $\Omega(\mp\infty)$ は (3.1.13) のように自由粒子状態 Φ_α を対応する「in」状態あるいは「out」状態に変換する演算子だ. また, (3.3.18) と (3.3.19) から同じことが運動量と角運動量についても簡単に言える.

$$\mathbf{P}\Omega(\mp\infty) = \Omega(\mp\infty)\mathbf{P}_0\ , \tag{3.3.26}$$

$$\mathbf{J}\Omega(\mp\infty) = \Omega(\mp\infty)\mathbf{J}_0\ . \tag{3.3.27}$$

最後に, 全ての Φ_α と $\Psi_\alpha{}^\pm$ はそれぞれ H_0 と H の同じ固有値 E_α を持った固有状態なので,

$$H\Omega(\mp\infty) = \Omega(\mp\infty)H_0 \tag{3.3.28}$$

だ. (3.3.25)–(3.3.28) は, 上記の仮定をすれば,「in」状態および「out」状態が非斉次ローレンツ変換のもとでちょうど自由粒子状態のように変換することを示している. また, これらは相似変換なので, 正確な生成子 $\mathbf{K}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{J}$ および H は $\mathbf{K}_0$, $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{J}_0$ および H_0 と同じ交換関係を

満たすことがわかる. これが S 行列のローレンツ不変性を証明する際に $\mathbf{K}$ を含む他の交換関係 (3.3.12), (3.3.13) および (3.3.15) を使う必要がなかった理由だ.

内部対称性

原子核物理における中性子と陽子の入れ替えに関する対称性や, 粒子と反粒子の間の「荷電共役 (charge-conjugation)」対称性のように, ローレンツ不変性と直接関係が無く, 全ての慣性系において同じに見える様々な対称性が存在する. そのような対称変換 T は物理的状態のヒルベルト空間にユニタリー演算子 $U(T)$ として作用し, 粒子の種類を記述する添字について,

$$U(T)\Psi_{p_1\sigma_1 n_1;\, p_2\sigma_2 n_2;\,\cdots} = \sum_{\bar{n}_1\bar{n}_2\cdots} \mathcal{D}_{\bar{n}_1 n_1}(T)\,\mathcal{D}_{\bar{n}_2 n_2}(T)\cdots \times \Psi_{p_1\sigma_1\bar{n}_1;\, p_2\sigma_2\bar{n}_2;\,\cdots} \tag{3.3.29}$$

のように線形変換を引き起こす. 2 章での一般的な議論に従って, $U(T)$ は群の乗法則,

$$U(\bar{T})\,U(T) = U(\bar{T}T) \tag{3.3.30}$$

を満たさねばならない. ここで $\bar{T}T$ は最初に変換 T を実行し, それからある別の変換 $\bar{T}$ を実行して得られる変換だ. (3.3.29) に $U(\bar{T})$ を作用させると, 行列 $\mathcal{D}$ は同じ法則,

$$\mathcal{D}(\bar{T})\mathcal{D}(T) = \mathcal{D}(\bar{T}T) \tag{3.3.31}$$

を満たすことがわかる. また, $U(T)$ を二つの異なる「in」状態または二つの異なる「out」状態に作用させて得られる状態のスカラー積をとり, 規格化条件 (3.1.2) を用いると, $\mathcal{D}(T)$ はユニタリーでなければならないことがわかる.

$$\mathcal{D}^\dagger(T) = \mathcal{D}^{-1}(T). \tag{3.3.32}$$

最後に, $U(T)$ を一つの「out」状態と一つの「in」状態に作用させて得られる状態のスカラー積をとると, $\mathcal{D}$ は,

$$\sum_{\bar{N}_1\bar{N}_2\cdots}\sum_{\bar{N}'_1\bar{N}'_2\cdots}\mathcal{D}^*_{\bar{N}'_1n'_1}(T)\mathcal{D}^*_{\bar{N}'_2n'_2}(T)\cdots\mathcal{D}_{\bar{N}_1n_1}(T)\,\mathcal{D}_{\bar{N}_2n_2}(T)\cdots$$
$$\times S_{p'_1\sigma'_1\bar{N}'_1;\,p'_2\sigma'_2\bar{N}'_2;\,\cdots\,,\,p_1\sigma_1\bar{N}_1;\,p_2\sigma_2\bar{N}_2;\,\cdots}$$
$$= S_{p'_1\sigma'_1n'_1;\,p'_2\sigma'_2n'_2;\,\cdots\,,\,p_1\sigma_1n_1;\,p_2\sigma_2n_2;\,\cdots} \tag{3.3.33}$$

の意味で S 行列と交換することがわかる. 前と同じく, これは内部対称性 T に関して理論が不変であることの定義だ. なぜなら, (3.3.33) を導くためには同じユニタリー演算子 $U(T)$ が変換 (3.3.29) を「in」状態と「out」状態の両方に引き起こすことを示す必要があるからだ. 自由粒子状態にこれらの変換を,

$$U_0(T)\Phi_{p_1\sigma_1n_1;\,p_2\sigma_2n_2;\,\cdots}$$
$$= \sum_{\bar{N}_1\bar{N}_2\cdots}\mathcal{D}_{\bar{N}_1n_1}(T)\,\mathcal{D}_{\bar{N}_2n_2}(T)\cdots\Phi_{p_1\sigma_1\bar{N}_1;\,p_2\sigma_2\bar{N}_2;\,\cdots} \tag{3.3.34}$$

のように引き起こし, かつハミルトニアンの自由粒子部分と相互作用部分の両方と

$$U_0^{-1}(T)H_0U_0(T) = H_0\,, \tag{3.3.35}$$

$$U_0^{-1}(T)VU_0(T) = V \tag{3.3.36}$$

のように交換する「摂動を受けない」変換演算子 $U_0(T)$ が存在すれば, これは正しい. リップマン・シュウィンガー方程式 (3.1.17) あるいは (3.1.13) のどちらかより, 演算子 $U_0(T)$ は変換 (3.3.29) を自由粒子状態だけでなく「in」状態と「out」状態にも引き起こすことがわかり, $U(T)$ を $U_0(T)$ とおいて (3.3.29) を導ける.

物理的に非常に重要な特別の場合は, T が単一のパラメータ θ の関数で,

$$T(\bar{\theta})T(\theta) = T(\bar{\theta}+\theta) \tag{3.3.37}$$

を満たす 1 パラメータのリー群 (Lie group) の場合だ. 2.2 節で示したように, この場合の対応するヒルベルト空間の演算子は, Q をエルミート演算子として,

$$U(T(\theta)) = \exp(iQ\theta) \tag{3.3.38}$$

の形をとらねばならない. 同様に行列 $\mathcal{D}(T)$ は q_n を粒子の種類に依存する実数の組として,

$$\mathcal{D}_{n'n}(T(\theta)) = \delta_{n'n}\exp(iq_n\theta) \tag{3.3.39}$$

の形をとらねばならない. ここで (3.3.33) から, 単に q が保存することが, すなわち $S_{\beta\alpha}$ は,

$$q_{n'_1} + q_{n'_2} + \cdots = q_{n_1} + q_{n_2} + \cdots \tag{3.3.40}$$

でなければゼロになることがわかる. そのような保存則の典型的な例は電荷の保存則だ. また, 知られている全ての過程はバリオン数 (陽子, 中性子, ハイペロン等のバリオンの数からそれらの反粒子の数を引いたもの) およびレプトン数 (電子, ミューオン, τ 粒子等のレプトンの数からそれらの反粒子の数を引いたもの) を保存するが, 4 巻 (原著 II 巻) で見るように, これらの保存則は非常に良い近似にすぎないと信じられている. また, この種の保存則で, 明らかに近似的にしか成立しないものもある. この例としては, ロチェスターとバトラー[5]が 1947 年に宇宙線中で発見した粒子群の比較的長い寿命を説明するために導入されたストレンジネス (strangeness) の保存則がある. 例えば, 今日 K^+ および K^0 と呼ばれる* 中間子にはストレンジネス +1 が, またハイペロン Λ^0, Σ^+, Σ^0, Σ^- にはストレンジネス −1 が割り当てられ, もっと馴染みのある陽子, 中性子, π 中間子 (パイオン) はストレン

---

*上付き添字は電子の電荷の絶対値を単位とした電荷を表す. 「ハイペロン」はゼロでないストレンジネスと単位バリオン数を持つ任意の粒子だ.

ジネス ゼロを持つ. 強い相互作用におけるストレンジネスの保存則は, なぜストレンジ粒子が $\pi^+ + n \to K^+ + \Lambda^0$ のような反応で常に対で生成されるかを説明する. 一方 $\Lambda^0 \to p + \pi^-$ および $K^+ \to \pi^+ + \pi^0$ のようにストレンジ粒子が非ストレンジ粒子に比較的ゆっくり崩壊する反応は, ストレンジネスを保存しない相互作用が非常に弱いことを示している.

生成子が互いに交換しない「非可換」な対称性の典型的な例は, アイソスピン (isotopic spin) の対称性だ. これは, 陽子–中性子間の強い力と同様に陽子–陽子間の強い力が存在することを示す実験[7]を基礎に1937 年に提唱された.[6] 数学的には, その群は 3 次元回転群の被覆群の $SU(2)$ 群だ. その生成子は t_i ($i = 1, 2, 3$) と記述され, (2.4.18) の交換関係,

$$[t_i, t_j] = i\epsilon_{ijk}t_k$$

を満たす. アイソスピン対称性は, それが保存する程度に, 粒子が, 整数または半整数 T とその t_3 の値で区別される $2T+1$ 個の成分を添字に持つ縮退した多重項を形成することを要求する. これはちょうど回転不変性が縮退したスピン多重項を要求するのと同じだ. これらの多重項は, $T = \frac{1}{2}$ で $t_3 = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ の核子 p と n, $T = 1$ で $t_3 = +1, 0, -1$ のパイオン π^+, π^0, π^-, および $T = 0$ で $t_3 = 0$ の Λ^0 ハイペロンを含む. これらの例は電荷 Q, アイソスピンの第 3 成分 t_3, バリオン数 B, ストレンジネス S の間の関係,

$$Q = t_3 + (B + S)/2$$

の実例になっている. この関係は元来観測された選択則から推測されたものだが, 1960 年にゲルマン (Gell-Mann) とネーマン (Ne'eman)[8] により, アイソスピン $\mathbf{T}$ と「ハイパーチャージ (hypercharge)」 $Y \equiv B + S$ の両方を, 非可換群 $SU(3)$ に基づくもっと大きいがもっとひどく破れている非可換内部対称性のリー代数に埋め込んだ結果として解釈さ

れた. 4巻(原著II巻)で見るように, 今日ではアイソスピン対称性と $SU(3)$ 対称性はそれぞれ, 強い相互作用の現代的な理論である量子色力学(quantum chromodynamics)において最も軽い 2 個または 3 個のクォークの質量が小さいことの付随的結果として理解されている.

強い相互作用をする粒子間の反応におけるアイソスピン対称性の帰結は, 回転不変性の意味を導くために考え出されたよく知られた方法と同じ方法で導くことができる. 特に, 2 体反応 $A+B\to C+D$ の場合, (3.3.33)は S 行列が(アイソスピン以外の全ての添字を省略して)

$$S_{t_{C3}t_{D3},t_{A3}t_{B3}}=\sum_{T,t_3}C_{T_CT_D}(Tt_3;t_{C3}t_{D3})C_{T_AT_B}(Tt_3;t_{A3}t_{B3})S_T$$

の形に書けることを要求する. ここで $C_{j_1j_2}(j\sigma;\sigma_1\sigma_2)$ は, 第 3 成分 σ を持ったスピン j をそれぞれ第 3 成分 σ_1 と σ_2 をもつスピン j_1 と j_2 から構成する際の通常のクレブシュ・ゴルダン(Clebsch–Gordan)係数[9] である. また S_T は, T およびここでは書いていない全ての運動量とスピン変数に依存するが, アイソスピンの第 3 成分 $t_{A3},t_{B3},t_{C3},t_{D3}$ には依存しない S 行列の「規約成分」だ. もちろん, これは, 全てのアイソスピン不変性と同様に, 近似的にしか成り立たない. なぜなら, この対称性は, 例えば p と n のような同じアイソスピン多重項の異なるメンバーが異なる電荷と若干異なる質量を持つという事実に示されているように, 電磁相互作用(およびその他の相互作用)では保存しない.

パリティ

変換 $\mathbf{x}\to-\mathbf{x}$ に関する対称性が実際に正しい範囲で, 「in」状態と「out」状態の両方が 1 粒子状態の直積のように変換するユニタリー演算子 P が存在しなければならない.

$$\mathsf{P}\Psi^{\pm}_{p_1\sigma_1n_1;\,p_2\sigma_2n_2;\,\cdots}=\eta_{n_1}\eta_{n_2}\cdots\Psi^{\pm}_{\mathcal{P}p_1\sigma_1n_1;\,\mathcal{P}p_2\sigma_2n_2;\,\cdots}\,. \qquad (3.3.41)$$

ここで, η_n は種類 n の粒子の固有パリティであり, また $\mathcal{P}$ は p^μ の空間成分を反転させる. (これは質量を持つ粒子の場合であり, 質量ゼロ粒子の場合の修正は明らかだ.) S 行列がパリティを保存する条件は,

$$S_{p_1'\sigma_1'n_1';\,p_2'\sigma_2'n_2';\,\cdots\,,\,p_1\sigma_1n_1;\,p_2\sigma_2n_2;\,\cdots} = \eta^*_{n_1'}\eta^*_{n_2'}\cdots\eta_{n_1}\eta_{n_2}\cdots$$
$$\times\, S_{\mathcal{P}p_1'\sigma_1'n_1';\,\mathcal{P}p_2'\sigma_2'n_2';\,\cdots\,,\,\mathcal{P}p_1\sigma_1n_1;\,\mathcal{P}p_2\sigma_2n_2;\,\cdots}\ . \tag{3.3.42}$$

だ. ちょうど内部対称性の場合と同じように, (3.3.41) を満たす P は, もし自由粒子状態にこのように作用すると定義されている演算子 P_0 が H_0 だけでなく V とも交換すれば, 実際に存在する.

位相 η_n は力学的な模型または実験のどちらかから推察できるが, それらによって η が一意的に決まるわけではない. これは, 常に P を, 任意の保存する内部対称性の演算子と組み合わせて再定義する自由度があるからだ. 例えば, もし P が保存するなら,

$$\mathsf{P}' \equiv \mathsf{P}\exp(i\alpha B + i\beta L + i\gamma Q)$$

も保存する. ここで, B, L, Q はそれぞれバリオン数, レプトン数, 電荷であり, α, β, γ は任意の実位相だ. よって, P と P$'$ のどちらをパリティ演算子と呼んでもよい. 中性子, 陽子, 電子は異なる B, L, Q の値の組み合わせを持っているので, 位相 α, β, γ をうまく選んで, 三つの粒子全ての固有パリティを $+1$ と定義することができる. しかし, 一度こうすると荷電パイオン ($n \to p + \pi^-$ の遷移で放出される) のようなその他の粒子の固有パリティはもはや任意ではない. また, 中性パイオン π^0 のように保存する量子数を持たない任意の粒子の固有パリティは常に意味がある.

上記の注意は固有パリティは常に値 ± 1 をとらねばならないのかという疑問を解く助けになる. 空間反転 P は群の乗法則 $\mathsf{P}^2 = 1$ を満たすと言うのは容易だが, 保存するパリティ演算子はこの演算子ではなく, ある種の位相変換だけ異なっているかもしれない. $\mathsf{P}^2 = 1$ か否か

にかかわらず, 演算子 P^2 はちょうど内部対称性変換のように振舞う.

$$\mathsf{P}^2\Psi^{\pm}_{p_1\sigma_1n_1;\,p_2\sigma_2n_2;\,\cdots} = \eta^2_{n_1}\eta^2_{n_2}\cdots\Psi^{\pm}_{p_1\sigma_1n_1;\,p_2\sigma_2n_2;\,\cdots}\,.$$

もしこの内部対称性が, α, β, γ を任意の値とする位相変換 $\exp(i\alpha B + i\beta L + i\gamma Q)$ の群のような連続対称群に属するなら, その逆の平方根もまたこの群に属する. それを例えば I_P と呼ぶと $I_P^2\mathsf{P}^2 = 1$ と $[I_P, \mathsf{P}] = 0$ が満たされる. (例えば, $\mathsf{P}^2 = \exp(i\alpha B + \cdots)$ なら, $I_P = \exp(-\frac{1}{2}i\alpha B + \cdots)$ ととればよい.) すると, $\mathsf{P}'^2 = 1$ を満たす新しいパリティ演算子 $\mathsf{P}' \equiv \mathsf{P}I_P$ が定義できる. この演算子は P と同程度に保存するので, これをパリティ演算子と呼んでいけない理由はない. その場合, 固有パリティは値 ± 1 しかとれない.

全ての固有パリティが値 ± 1 を持つように定義することが必ずしも可能ではない唯一の種類の理論は, どの位相変換の連続対称群にも属さない離散的な内部対称性がある理論だ.[10] 例えば, 角運動量保存の結果, 全ての半整数スピン粒子の総数 F は偶数だけ変化できる. よって内部対称性演算子 $(-1)^F$ は保存する. 既知の半整数スピン粒子は全てバリオン数とレプトン数の和 $B + L$ が奇数であり, よって知られている限り $(-1)^F = (-1)^{B+L}$ だ. もしこれが真実なら, $(-1)^F$ は α を任意の実数とする演算子 $\exp(i\alpha(B + L))$ から成る連続対称群の一部であり, 平方根の逆 $\exp(-i\pi(B + L)/2)$ を持つ. この場合, もし $\mathsf{P}^2 = (-1)^F$ なら全ての固有パリティが ± 1 となるように P を再定義できる. しかし, もし ($j = \frac{1}{2}$ と $B + L = 0$ を持ついわゆるマヨラナ・ニュートリノ (Majorana neutrino) のように) 半整数スピンと偶数の $B + L$ を持つ粒子が発見されれば, パリティ演算子自身が固有値 ± 1 を持つように再定義することができず, $\mathsf{P}^2 = (-1)^F$ となることが可能だ. この場合もちろん, $\mathsf{P}^4 = 1$ となり, よって全ての粒子は ± 1 かまたは (マヨラナ・ニュートリノのように) $\pm i$ のいずれかの固有パリティを持つ.

(3.3.42) から終状態の固有パリティの積が始状態の固有パリティの積に等しいかまたはこの積の逆符号に等しいなら, S 行列はそれぞれ3 元運動量について全体として偶または奇でなければならない. 例えば, パイオンは $\pi^- d$ 原子の $\ell = 0$ の基底状態から $\pi^- + d \to n + n$ 反応で重水素に吸収されうることが 1951 年に観測された.[11] (3.7 節で議論するように, 軌道角運動量の量子数 ℓ は相対論的物理においても, 非相対論的波動力学の場合と同様に用いることができる.) 始状態は全角運動量 $j = 1$ を持つ (パイオンと重水素はそれぞれスピンゼロと 1 を持つ) ので終状態は軌道角運動量 $\ell = 1$ と中性子の全スピン $s = 1$ を持つ. (他の可能性 $\ell = 1, s = 0$ と $\ell = 0, s = 1$ と $\ell = 2, s = 1$ は角運動量保存則からは許されるが, 終状態は 2 個の中性子に関して反対称でなければならないという要求から禁止される.) 終状態は $\ell = 1$ を持つので, 行列要素は全ての 3 元運動量の向きの反転に対して奇であり, よってこの反応における粒子の固有パリティ間には,

$$\eta_d \eta_{\pi^-} = -\eta_n^2$$

の関係があると結論できる. 重水素は偶数の軌道角運動量 (主として $\ell = 0$) を持った陽子と中性子の束縛状態であることは知られており, 中性子と陽子の固有パリティを同じにとることができることも見たので, $\eta_d = \eta_n^2$ であり, $\eta_{\pi^-} = -1$, すなわち負のパイオンは**擬スカラー** (pseudoscalar) 粒子だと結論できる. π^+ と π^0 もまた, これら 3 粒子間の対称性 (アイソスピン不変性) から期待されるとおりに, 負パリティを持つことが見出された.

パイオンの負パリティはある衝撃的な結果に導く. 3 個のパイオンに崩壊するスピンゼロ粒子は固有パリティ $\eta_\pi^3 = -1$ を持たなければならない. なぜなら, 崩壊する粒子が静止しているローレンツ系では, 回転不変性から許される行列要素はパイオンのお互いの運動量のスカラー積のみに依存するが, それは全ての運動量の反転のもとで偶だからだ.

(3個のパイオンの運動量から作られる3重スカラー積 $\mathbf{p}_1\cdot(\mathbf{p}_2\times\mathbf{p}_3)$ は $\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2+\mathbf{p}_3=0$ よりゼロになる.) 同じ理由で, 2個のパイオンに崩壊するスピンゼロ粒子は固有パリティ $\eta_\pi^2=+1$ を持たねばならない. 特に, 1940年代末に発見されたストレンジ粒子の中には, (崩壊生成物の角度依存性から推察される) 二つの異なるスピンゼロ粒子が存在するように思われた. その一方は τ と呼ばれ3個のパイオンに崩壊することからパリティ -1 が付与された. 他方は θ と呼ばれ2個のパイオンに崩壊することからパリティ $+1$ が付与された. これの問題は, より詳細に調べれば調べるほど, τ と θ がますます同一の質量と寿命を持つように思われる点だった. この問題の解決法が多くの人により提案されたが, リー (Lee) とヤン (Yang) は1956年ついに難問を一挙に解決し, τ と θ が (今日では $K^\pm$ として知られている) 同一粒子であり, その崩壊の原因となっている弱い相互作用ではパリティは保存しないと提唱した.[12]

この章の次の節で詳細に見るように, 物理的過程 $\alpha\to\beta$ ($\alpha\neq\beta$) の反応率は $|S_{\beta\alpha}|^2$ に比例し, その比例係数は全ての3元運動量の反転のもとで不変だ. 状態 α と β が一定の数の各々のタイプの粒子を含む限り, (3.3.42) の位相因子は $|S_{\beta\alpha}|^2$ に影響が無く, よって (3.3.42) は, $\alpha\to\beta$ の反応率が全ての3元運動量の向きの反転のもとで不変なことを意味する. すでに見たように, これは K 中間子が2個または3個のパイオンに崩壊する場合は回転不変性の自明な結果だが, もっと複雑な過程では反応率に対する自明でない制限となる. 例えば, リーとヤンの理論的な提唱に続いて, ウー (Wu) は国立基準局 (National Bureau of Standards) のグループと偏極コバルト源を用いたベータ崩壊 $\mathrm{Co}^{60}\to\mathrm{Ni}^{60}+e^-+\bar\nu$ の終状態電子の角度分布を測定した.[13] (この実験では反ニュートリノやニッケル原子核の運動量を測定する努力はされなかった.) 電子は崩壊核のスピンの方向と逆の方向により多く放出されることが見出された. それはもちろん, 全ての3元運動量

の反転のもとで不変であるなら不可能だ. 同様の結果は, ($\pi^+ \to \mu^+ + \nu$ の過程で生成される際に偏極している) 正のミューオンが陽電子, ニュートリノ, 反ニュートリノに崩壊する際にも見出された.[14] このようにして, これらの崩壊の原因となっている弱い相互作用では実際パリティが保存していないことが明らかになった. しかし, 12.5 節で議論する理由により, パリティは強い相互作用と電磁相互作用では保存しており, よって理論物理では重要な役割を果たし続けている.

時間反転

2.6 節で, 時間反転演算子 T は 1 粒子状態 $\Psi_{p,\sigma,n}$ に作用すると, 反転したスピンと運動量を持つ状態 $\Psi_{\mathcal{P}p,-\sigma,n}$ と位相 $\zeta_n(-1)^{j-\sigma}$ の積を与えることを見た. 多粒子状態は, これが時間反転変換なので「in」状態と「out」状態が,

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{T}\Psi^{\pm}_{p_1\sigma_1 n_1;\, p_2\sigma_2 n_2\cdots} \\
&= \zeta_{n_1}(-1)^{j_1-\sigma_1}\zeta_{n_2}(-1)^{j_2-\sigma_2}\cdots\Psi^{\mp}_{\mathcal{P}p_1\ -\sigma_1 n_1;\, \mathcal{P}p_2\ -\sigma_2 n_2;\,\cdots}
\end{aligned}
\tag{3.3.43}
$$

のように入れ替わることが期待される以外, いつものとおり 1 粒子状態の直積として変換する. (ふたたび, これは質量を持つ粒子の場合であり, ゼロ質量粒子の場合は明らかな修正が必要だ.) この仮定は,

$$
\mathsf{T}\Psi^{\pm}_{\alpha} = \Psi^{\mp}_{\mathcal{T}\alpha}
\tag{3.3.44}
$$

と略記するのが便利だ. ここで, $\mathcal{T}$ は (3.3.43) で示した位相因子がかかるとともに 3 元運動量とスピンの符号が反転することを示している. T は反ユニタリーなので,

$$
(\Psi^{-}_{\beta}, \Psi^{+}_{\alpha}) = (\mathsf{T}\Psi^{+}_{\alpha}, \mathsf{T}\Psi^{-}_{\beta})
\tag{3.3.45}
$$

となり, よって S 行列の時間反転不変性は,

$$S_{\beta,\alpha} = S_{\mathcal{T}\alpha,\mathcal{T}\beta}\ , \tag{3.3.46}$$

あるいはより詳細には,

$$\begin{aligned} & S_{p_1'\sigma_1'n_1';p_2'\sigma_2'n_2';\cdots\ ,\ p_1\sigma_1n_1;p_2\sigma_2n_2;\cdots} \\ &= \zeta_{n_1'}(-1)^{j_1'-\sigma_1'}\zeta_{n_2'}(-1)^{j_2'-\sigma_2'}\cdots\zeta^*_{n_1}(-1)^{j_1-\sigma_1}\zeta^*_{n_2}(-1)^{j_2-\sigma_2}\cdots \\ &\quad \times S_{\mathcal{P}p_1\ -\sigma_1\ n_1;\mathcal{P}p_2\ -\sigma_2\ n_2;\cdots\ ,\ \mathcal{P}p_1'\ -\sigma_1'\ n_1';\mathcal{P}p_2'\ -\sigma_2'\ n_2';\cdots} \end{aligned} \tag{3.3.47}$$

と表される. 運動量とスピンの反転に加えて, 時間反転を含む対称性の場合に期待されるように, 始状態と終状態の役割が入れ替わっていることに注意してほしい.

自由粒子状態に時間反転変換,

$$\mathsf{T}_0\Phi_\alpha \equiv \Phi_{\mathcal{T}\alpha} \tag{3.3.48}$$

を引き起こす演算子 T_0 が, 自由粒子ハミルトニアンと交換するだけでなく (それは自動的だ) 相互作用ハミルトニアンとも交換する, つまり,

$$\mathsf{T}_0^{-1}H_0\mathsf{T}_0 = H_0\ , \tag{3.3.49}$$

$$\mathsf{T}_0^{-1}V\mathsf{T}_0 = V \tag{3.3.50}$$

ならば, S 行列は (3.3.47) の変換則を満たす. この場合 $\mathsf{T} = \mathsf{T}_0$ ととることができ, (3.1.13) または (3.1.16) を用いると時間反転変換が (3.3.44) で述べたとおりに作用することを示せる. 例えば, T をリップマン・シュウィンガー方程式 (3.1.16) に作用させて (3.3.48)–(3.3.50) を用いれば,

$$\mathsf{T}\Psi^\pm_\alpha = \Phi_{\mathcal{T}\alpha} + \int d\gamma\,[E_\alpha - H_0 \mp i\epsilon]^{-1}V\mathsf{T}\Psi^\pm_\alpha$$

を得る. ここで $\pm i\epsilon$ の符号は T が反ユニタリーであるため反転する. これはちょうど $\Psi^{\mp}_{T\alpha}$ に対するリップマン・シュウィンガー方程式であり, (3.3.44) を正当化する. 同様に, T は反ユニタリーなので $\Omega(t)$ の指数の i の符号を変え, よって,

$$\mathsf{T}\Omega(-\infty)\Phi_\alpha = \Omega(\infty)\Phi_{T\alpha}$$

となり, 再び (3.3.44) が導かれる.

パリティ保存の場合と異なり, 時間反転不変の条件 (3.3.46) は一般には, 過程 $\alpha \to \beta$ の反応率が過程 $T\alpha \to T\beta$ の反応率と同じだと言っているわけではない. しかし, S 行列が,

$$S_{\beta\alpha} = S^{(0)}_{\beta\alpha} + S^{(1)}_{\beta\alpha} \tag{3.3.51}$$

の形をしているときには, これと似たことが成り立つ. ここで, $S^{(1)}$ は小さく, 他方 $S^{(0)}$ は一般には $S^{(1)}$ よりずっと大きな行列要素を持つが, 興味のある特別な過程については行列要素がたまたまゼロになるとする. (例えば, その過程を原子核のベータ崩壊 $N \to N' + e^- + \bar{\nu}$ とすると, $S^{(0)}$ は強い相互作用と電磁相互作用のみで生成される S 行列で, $S^{(1)}$ は弱い相互作用によって生成される S 行列への補正だ. 3.5 節ではこの種の場合「歪曲波ボルン近似」により (3.3.51) の形の S 行列が得られることを示す. 場合によっては, $S^{(0)}$ は単に恒等演算子だ.) $S^{(1)}$ の 1 次までででは, S 演算子のユニタリー条件は,

$$1 = S^\dagger S = S^{(0)\dagger}S^{(0)} + S^{(0)\dagger}S^{(1)} + S^{(1)\dagger}S^{(0)}$$

となる. ゼロ次の関係式 $S^{(0)\dagger}S^{(0)} = 1$ を用いると, これは $S^{(1)}$ の実条件,

$$S^{(1)} = -S^{(0)}S^{(1)\dagger}S^{(0)} \tag{3.3.52}$$

を与える. もし $S^{(0)}$ だけでなく $S^{(1)}$ も時間反転の条件 (3.3.46) を満

たすなら, これは,

$$S^{(1)}_{\beta\alpha} = -\int d\gamma \int d\gamma'\, S^{(0)}_{\beta\gamma'}\, S^{(1)*}_{\mathcal{T}\gamma'\,\mathcal{T}\gamma}\, S^{(0)}_{\gamma\alpha} \tag{3.3.53}$$

の形に書き換えれる. $S^{(0)}$ はユニタリーなので, 過程 $\alpha \to \beta$ と $\mathcal{T}\alpha \to \mathcal{T}\beta$ の反応率は, $S^{(0)}$ に関する始状態と終状態の完全系 $\mathcal{I}$ と $\mathcal{F}$ について和をとると, 等しい. (ここで「完全」とは, $S^{(0)}_{\alpha'\alpha}$ がゼロでなく, α か α' のどちらかが $\mathcal{I}$ に含まれれば, 両方の状態は $\mathcal{I}$ に含まれ, 同様のことが $\mathcal{F}$ についても成り立つことを意味する.) 最も簡単な場合には, 「完全」系 $\mathcal{I}$ と $\mathcal{F}$ はただ一つだけの状態から成る. すなわち, 始状態と終状態はそれぞれ固有値 $e^{2i\delta_\alpha}$ と $e^{2i\delta_\beta}$ を持つ $S^{(0)}$ の固有状態だ. (δ_α と δ_β は, 「位相のずれ (phase shift)」と呼ばれ, $S^{(0)}$ がユニタリーなので実だ.) この場合, (3.3.53) は単に,

$$S^{(1)}_{\beta\alpha} = -e^{2i(\delta_\alpha+\delta_\beta)} S^{(1)*}_{\mathcal{T}\beta\,\mathcal{T}\alpha} \tag{3.3.54}$$

となり, 過程 $\alpha \to \beta$ の S 行列の絶対値は過程 $\mathcal{T}\alpha \to \mathcal{T}\beta$ の場合と等しい. これは例えば原子核のベータ崩壊においては (終状態の電子と原子核との相対的に弱いクーロン相互作用を無視すれば) 正しい. なぜなら, 始状態も終状態もともに強い相互作用の S 行列の ($\delta_\alpha = \delta_\beta = 0$ を持つ) 固有状態だからだ. このように, 時間反転不変性が成り立っていれば, ベータ崩壊過程の微分反応率は, 全粒子の運動量とスピンの z 成分 σ を反転させたとき不変でなければならない. この予言はパリティ非保存を発見した 1956 年の実験 [13,14] とは矛盾しない. 例えば, 時間反転不変性は, $Co^{60} \to Ni^{60} + e^- + \bar{\nu}$ の崩壊で生成される電子は Co^{60} のスピンの方向と逆方向により多く放出されることと矛盾しない. 以下で述べるように, 時間反転不変性が破れている間接的証拠が 1964 年に現れたが, この不変性は強い相互作用と電磁相互作用ばかりでなく弱い相互作用においても依然として有用な近似的対称性だ.

場合によっては $\mathcal{T}\alpha = \alpha$ および $\mathcal{T}\beta = \beta$ を満たす状態の基底を用

いることができるが, その場合には (3.3.54) は,

$$S^{(1)}_{\beta\alpha} = -e^{2i(\delta_\alpha+\delta_\beta)} S^{(1)*}_{\beta\alpha} \tag{3.3.55}$$

となり, $iS^{(1)}_{\beta,\alpha}$ が位相 $\delta_\alpha + \delta_\beta \bmod \pi$ を持つことがわかる. これは**ワトソンの定理** (Watson's theorem)[15]として知られている. (3.3.54) または (3.3.55) の位相は, 異なる終状態間の干渉がある過程で測定できるかもしれない. 例えば, スピン 1/2 のハイペロン Λ が核子とパイオンに崩壊する過程では, 終状態は軌道角運動量 $\ell = 0$ または $\ell = 1$ しか持てない. Λ のスピンに相対的なパイオンの角度分布はこれらの状態間の干渉を含み, よってワトソンの定理にしたがいそれら状態の位相のずれの差 $\delta_s - \delta_p$ に依存する.

PT

1957 年のパリティの破れの実験は時間反転不変性を排除しなかったが, その実験は直ちに積 PT が保存しないことを示した. この演算子は, もし保存すれば, T と同じ理由で反ユニタリーでなければならず, 原子核のベータ崩壊のような過程ではその結果は (3.3.54) のような形の関係式

$$S^{(1)}_{\beta\alpha} = -e^{i(\delta_\alpha+\delta_\beta)} S^{(1)*}_{\mathcal{PT}\beta\ \mathcal{PT}\alpha}$$

となる. ここで $\mathcal{PT}$ は全てのスピンの z 成分の符号を反転させるが, どの運動量も反転させない. 終状態のクーロン相互作用を無視すれば, 崩壊 $\mathrm{Co}^{60} \to \mathrm{Ni}^{60} + e^- + \bar{\nu}$ において電子が Co^{60} のスピンと同じ, あるいは逆の方向に特に多く飛び出すことはあり得ないということになるが, これは観測事実に反する.

C, CP, CPT

すでに述べたように, 荷電共役として知られている, 粒子と反粒子を入れ替える内部対称性変換がある. 形式的には, これにともなうユ

ニタリー演算子 C が存在する．それが多粒子系におよぼす効果は，

$$\mathsf{C}\Psi^{\pm}_{p_1\sigma_1 n_1;\, p_2\sigma_2 n_2;\,\cdots} = \xi_{n_1}\xi_{n_2}\cdots\Psi^{\pm}_{p_1\sigma_1 n_1^c;\, p_2\sigma_2 n_2^c;\,\cdots} \tag{3.3.56}$$

だ．ここで n^c は型 n の粒子の反粒子であり，ξ_n は更に別の位相だ．もしこれが「in」状態と「out」状態の両方について成り立つなら，S 行列は不変性の条件，

$$\begin{aligned}&S_{p_1'\sigma_1' n_1';\, p_2'\sigma_2' n_2';\,\cdots\,,\; p_1\sigma_1 n_1;\, p_2\sigma_2 n_2;\,\cdots}\\ &= \xi^*_{n_1'}\xi^*_{n_2'}\cdots\xi_{n_1}\xi_{n_2}\cdots S_{p_1'\sigma_1' n_1^{c\prime};\, p_2'\sigma_2' n_2^{c\prime};\,\cdots\,,\; p_1\sigma_1 n_1^c;\, p_2\sigma_2 n_2^c;\,\cdots}\end{aligned} \tag{3.3.57}$$

を満たす．他の内部対称性と同様に，自由粒子状態に (3.3.56) のように作用する演算子 C_0 が H_0 だけでなく相互作用 V とも交換すれば，S 行列はこの条件を満たす．この場合，$\mathsf{C} = \mathsf{C}_0$ だ．

位相 ξ_n は荷電共役パリティと呼ばれる．通常のパリティ η_n と全く同様に，ξ_n は一般に一意的には定義されない．なぜなら，(3.3.56) を満たすように定義された任意の演算子 C に対してそれに任意の内部対称性変換 $\exp(i\alpha B + i\beta L + i\gamma Q)$ をかけて異なる ξ_n を持つ別のそのような演算子を見つけることができるからだ．荷電共役パリティを個別に測定可能な唯一の粒子は，光子や中性パイオンのように保存する量子数を持たず自分自身の反粒子である完全に中性の粒子だ．完全に中性の粒子のみを含む反応では，(3.3.57) より荷電共役パリティの始状態と終状態における積は等しいことがわかる．例えば，後で見るように光子は量子電磁理論により荷電共役パリティ $\eta_\gamma = -1$ を持つことが要求され，よって中性パイオンの崩壊 $\pi^0 \to 2\gamma$ が観測されることから $\eta_{\pi^0} = +1$ だ．そして過程 $\pi^0 \to 3\gamma$ は禁止されるが，それは実際正しいことが知られている．この二つの粒子の場合，荷電共役パリティは実であり，$+1$ または -1 だ．通常のパリティと全く同じように，全ての内部位相変換対称性が位相変換の連続群に属するならばこ

れは常に正しい. なぜなら, その場合 C^2 に等しい内部対称性の平方根の逆をかけて C を再定義でき, その結果新しい C は $\mathsf{C}^2 = 1$ を満たすからだ.

一般の反応の場合, (3.3.57) より, ある過程の反応率は粒子を対応する反粒子で置き換えた過程の反応率に等しい. これは 1957 年のパリティ非保存の実験と直接は矛盾しない. (コバルトの反粒子のベータ崩壊を研究できるようになるのはずっと先のことであろう.) しかしこれらの実験は, パリティ非保存を説明するためにリーとヤン[12]によって修正された弱い相互作用の理論では C が保存しないことを示した. (以下で見るように, TP 保存の破れが観測されたことは, リーとヤンにより考えられた特定の理論においてばかりでなく, どのような弱い相互作用の場の理論においても C 保存が破れていることを意味する.) 今日では, C と P の両方が強い相互作用と電磁相互作用では保存するが, P ばかりでなく C も, ベータ崩壊やパイオンとミューオンの崩壊のような過程を引き起こす弱い相互作用では保存しないことが知られている.

初期のパリティ非保存の実験では, C と P の両方とも弱い相互作用で保存しないことが示されたが, それらの積 CP は普遍的に保存する可能性は残されていた. 数年間は, CP が一般的に保存することが見出されると (完全な確信があったわけではないが) 期待された. これは中性 K 中間子の性質にとって特に重要な結果であった. 1954 年にゲルマン (Gell-Mann) とパイス (Pais)[16]は, K^0 中間子は自分自身の反粒子ではない (K^0 はストレンジネスとして知られている近似的に保存する量がゼロでない) ので, 一定の崩壊率を持つ粒子は K^0 でも $\overline{K^0}$ でもなく, それらの線形結合 $K^0 \pm \overline{K^0}$ だと指摘した. これはもともと C の保存に関連して説明されたが, C が弱い相互作用で保存しない状況では CP 保存に基づいて同様に議論できる. CP 演算子および K^0 と

$\overline{K^0}$ の位相を,

$$\mathsf{CP}\Psi_{K^0} = \Psi_{\overline{K^0}}$$

および,

$$\mathsf{CP}\Psi_{\overline{K^0}} = \Psi_{K^0}$$

となるように定義すれば, CP の固有値がそれぞれ +1 と −1 の自己荷電共役な 1 粒子状態,

$$\Psi_{K_1^0} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\Psi_{K^0} + \Psi_{\overline{K^0}}]$$

と,

$$\Psi_{K_2^0} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\Psi_{K^0} - \Psi_{\overline{K^0}}]$$

を定義できる. これらの粒子の崩壊モードのうちで最も速いのは 2 個のパイオン状態への崩壊だが, CP の保存により崩壊が許されるのは K_1 であり, K_2 ではない.** このようにして K_2^0 は遅いモードのみで 3 個のパイオンに崩壊するか, あるいは 1 個のパイオン, ミューオンまたは電子, およびニュートリノに崩壊することが期待される. しかし, 長寿命の中性 K 中間子が 2 個のパイオンに崩壊する確率をわずかながら持っていることが, フィッチ (Fitch) とクローニン (Cronin) により 1964 年に発見された.[17] 結論として, CP は弱い相互作用では厳密には保存しないが, C と P 単独での場合より良く保存している.

5 章で見るように, C と CP はともに厳密には保存しないが, 積 CPT は任意の場の量子論において全ての相互作用で厳密に保存すると信じる立派な理由がある. 粒子と反粒子の間の正確な対応を与えるのは CPT だ. 特に, CPT がハミルトニアンと交換する事実は, 安定な粒子とその反粒子が正確に等しい質量を持つことを我々に教えている.

**中性 K 中間子はスピンがゼロなので, 2 個のパイオンから成る終状態は $\ell = 0$ を持ち, よって P = +1 だ. 更に, 二つの π^0 の場合は, π^0 が C = +1 であるために C = +1 であり, また $\ell = 0$ の $\pi^+\pi^-$ 状態の場合は, C が 2 個のパイオンを入れ替えるので C = +1 だ.

CPT は反ユニタリーなので, 任意の過程の S 行列を全てのスピンの 3 成分を反転し粒子を反粒子で置き換えた逆過程の S 行列と関係づける. しかし S 行列が, 反応を生成する弱い項 $S^{(1)}$ と始状態および終状態に作用する強い項 $S^{(0)}$ に分解できる場合には, T 保存の意味を調べる際に上で用いたのと同じ議論を使える. すなわち, 任意の過程の反応率は, $S^{(0)}$ に関する始状態と終状態の完全系について和をとれば, 同じ過程で粒子を反粒子に置き換えスピンの 3 成分を反転させた場合の反応率に等しいことを示すことができる. 特に, $S^{(0)}_{\beta_1\beta_2} \neq 0$ なる 1 対の終状態 β_1, β_2 に粒子が崩壊する部分崩壊率は, 反粒子が対応する終状態 $\mathcal{CPT}\beta_1$ と $\mathcal{CPT}\beta_2$ に崩壊する部分崩壊率とは異なりうるが, 3.5 節で見るように, (全く近似なしに) 任意の全崩壊率はその反粒子の全崩壊率に等しい.

パリティの破れに関する 1957 年の実験が, 既存の弱い相互作用の理論の枠内で, P 保存ばかりでなく C 保存もひどく破れているのに CP はそれ程破れていない証拠と解釈できた理由が今や理解できる. これらの理論は場の理論であり, よって自動的に CPT を保存する. 実験は, 原子核のベータ崩壊では PT 保存はひどく破れているが T はそれ程破れていないことを示した. よって, これらの実験と矛盾せずに CPT を保存する任意の理論は, C 非保存も包含しなければならないが CP 非保存は含む必要がなかったのだ.

同様に, 1964 年に弱い相互作用での CP 保存のわずかな破れが発見されて, 全ての相互作用が CPT のもとで不変として, 弱い相互作用では T も正確には保存しないと推察された. 以来 K^0–$\overline{K^0}$ 系のより詳細な研究によって, これが正しいことが示されたが,[18] これまでのところ時間反転不変性の破れの他の直接的な証拠は発見されていない.

3.4 反応率と断面積

S 行列 $S_{\beta\alpha}$ は遷移 $\alpha \to \beta$ の確率振幅だが, これは実験家が測定する遷移率や断面積とどう関係しているのだろうか? 特に, (3.3.2) のように $S_{\beta\alpha}$ は全エネルギーと運動量の保存を保証する因子 $\delta^4(p_\beta - p_\alpha)$ を持つが, 遷移確率 $|S_{\beta\alpha}|^2$ 中の因子 $[\delta^4(p_\beta - p_\alpha)]^2$ をどう扱えばよいのだろう. これらの問題を考察する正しい方法は, 実際の実験方法を調べ, 波束を用いて衝突前には相互に遠く離れて孤立している粒子を表し, そしてこれらの多粒子状態の重ね合わせの時間的経過を追っていくことだ. (筆者の知る限りでは) 物理の興味ある未解決の問題でこれらの問題の詳細を明らかにすることに懸かっているものはないので, 以下ではそうする代わりに主要な結果を迅速かつ簡単に導く. しかし, 実際にそれは導出というよりも記憶法だ

物理的な粒子の系全体が巨視的な体積 V を持った大きな箱に閉じこめられていると考える. 例えば, この箱を立方体にとることができるが, 反対側の点を同一視すると, 空間の波動関数の 1 価性の要求から運動量は,

$$\mathbf{p} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3) \tag{3.4.1}$$

と量子化される. ここで, n_i は整数で, $L^3 = V$ だ. すると, 全ての 3 次元デルタ関数は,

$$\delta^3_V(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3}\int_V d^3x\, e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\cdot\mathbf{x}} = \frac{V}{(2\pi)^3}\delta_{\mathbf{p}',\mathbf{p}} \tag{3.4.2}$$

となる. ここで $\delta_{\mathbf{p}',\mathbf{p}}$ は通常のクロネッカーのデルタ記号で, 添字が等しければ 1 で, 異なればゼロだ. 規格化条件 (3.1.2) は, 我々が使っている状態のスカラー積が, クロネッカー・デルタの積の和だけでなく因子 $[V/(2\pi)^3]^N$ を含むことを意味している. ここで N は状態に含まれる粒子の数だ. 遷移確率を計算するには内積が 1 の状態を使わね

ばならないので, 今考えている箱について近似的に規格化された状態,

$$\Psi_\alpha^{\text{Box}} \equiv \left[(2\pi)^3/V\right]^{N_\alpha/2}\Psi_\alpha \tag{3.4.3}$$

を導入し, その内積を,

$$\left(\Psi_\beta^{\text{Box}},\ \Psi_\alpha^{\text{Box}}\right) = \delta_{\beta\alpha} \tag{3.4.4}$$

とする. ここで $\delta_{\beta\alpha}$ は 3 元運動量, スピン, 粒子の種類を表す添字の各々について 1 個づつあるクロネッカー・デルタの積, およびそれらの粒子を入れ替えた項だ. これに対応して, S 行列は,

$$S_{\beta\alpha} = \left[V/(2\pi)^3\right]^{(N_\beta+N_\alpha)/2} S_{\beta\alpha}^{\text{Box}} \tag{3.4.5}$$

と書かれ, $S_{\beta\alpha}^{\text{Box}}$ は状態 (3.4.3) を用いて計算される.

もちろん, 粒子を箱の中に永久に放置すれば, あらゆる可能な遷移が何度も起こるであろう. 意味のある遷移確率を計算するには系を「時間の箱」にも入れなければならない. 相互作用は時間 T の間だけはたらいていると考える. 一つすぐにわかることは, エネルギー保存のデルタ関数が

$$\delta_T(E_\alpha - E_\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} \exp\left(i(E_\alpha - E_\beta)t\right)dt \tag{3.4.6}$$

で置き換わることだ. 相互作用がはたらく以前に状態 α にある多粒子状態が, 相互作用が切れた後に状態 β にある確率は,

$$P(\alpha\to\beta) = \left|S_{\beta\alpha}^{\text{Box}}\right|^2 = \left[(2\pi)^3/V\right]^{(N_\alpha+N_\beta)}\left|S_{\beta\alpha}\right|^2 \tag{3.4.7}$$

だ. これは箱の中のある特定の状態 β についての確率だ. 箱の中の 1 粒子が運動量空間の体積 d^3p 内にもつ状態数は, $Vd^3p/(2\pi)^3$ だ. これは, 運動量 (3.4.1) が $\mathbf{p}$ の近傍で運動量空間の d^3p の体積内に入るような三つ組の整数 n_1, n_2, n_3 の数だ. 終状態の幅 $d\beta$ を終状態の各粒

子の $d\beta$ の積と定義すると, この範囲内の全状態数は,

$$d\mathcal{N}_\beta = \left[V/(2\pi)^3\right]^{N_\beta} d\beta \tag{3.4.8}$$

だ. よって系が $d\beta$ の範囲の終状態に達する全確率は,

$$dP(\alpha \to \beta) = P(\alpha \to \beta) d\mathcal{N}_\beta = \left[(2\pi)^3/V\right]^{N_\alpha} |S_{\beta\alpha}|^2 \, d\beta \tag{3.4.9}$$

だ. この節を通して, 終状態 β は, 始状態 α と (少しでも) 異なるだけでなく, 状態 β の粒子の (状態全体以外の) どの部分集合をとっても状態 α の粒子の対応する部分集合と正確に同じ 4 元運動量を持つことがないという, より厳しい条件を満たすものに限る. (次の章で導入する言葉を使えば, これは S 行列の連結部分のみを考えることを意味する.) そのような状態については, デルタ関数を含まない行列要素 $M_{\beta\alpha}$ を以下のように定義できる.

$$S_{\beta\alpha} \equiv -2i\pi \delta_V^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha)\delta_T(E_\beta - E_\alpha) M_{\beta\alpha} \, . \tag{3.4.10}$$

箱を導入したことで, $\beta \neq \alpha$ なる $|S_{\beta\alpha}|^2$ のデルタ関数の 2 乗の解釈が,

$$\left[\delta_V^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha)\right]^2 = \delta_V^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha)\delta_V^3(0) = \delta_V^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha)V/(2\pi)^3 \, ,$$

$$\left[\delta_T(E_\beta - E_\alpha)\right]^2 = \delta_T(E_\beta - E_\alpha)\delta_T(0) = \delta_T(E_\beta - E_\alpha)T/2\pi \, ,$$

と可能になり, (3.4.9) は微分遷移確率,

$$\begin{aligned} dP(\alpha \to \beta) = (2\pi)^2 \left[(2\pi)^3/V\right]^{N_\alpha - 1} &(T/2\pi)|M_{\beta\alpha}|^2 \\ \times \ \delta_V^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha)&\delta_T(E_\beta - E_\alpha) d\beta \end{aligned}$$

を与える. V と T を非常に大きくとれば, このデルタ関数の積は通常の 4 次元デルタ関数 $\delta^4(p_\beta - p_\alpha)$ と解釈できる. この極限で, 遷移確率は単に相互作用がはたらいている時間 T に比例し, その係数は微分

遷移率 (differential transition rate) ,

$$d\Gamma(\alpha \to \beta) \equiv dP(\alpha \to \beta)/T$$
$$= (2\pi)^{3N_\alpha-2}V^{1-N_\alpha}|M_{\beta\alpha}|^2\delta^4(p_\beta - p_\alpha)d\beta \qquad (3.4.11)$$

と解釈できる. ここで今度は,

$$S_{\beta\alpha} \equiv -2\pi i\delta^4(p_\beta - p_\alpha)M_{\beta\alpha} \qquad (3.4.12)$$

だ. これが, S 行列の計算を解釈して実際の実験に対する予言をするときに用いる基本公式だ. この節の後で因子 $\delta^4(p_\alpha - p_\beta)d\beta$ の解釈に戻る.

特に重要なのは以下の二つの場合だ.

$\boldsymbol{N_\alpha = 1}$**:**

この場合 (3.4.11) で体積 V は相殺し, 1 粒子状態 α が一般の多粒子状態 β に崩壊する遷移率,

$$d\Gamma(\alpha \to \beta) = 2\pi|M_{\beta\alpha}|^2\delta^4(p_\beta - p_\alpha)d\beta \qquad (3.4.13)$$

が得られる. もちろん, これは相互作用がはたらいている時間 T が粒子 α の寿命 τ_α よりずっと短い場合にのみ意味があるので, $\delta_T(E_\alpha - E_\beta)$ において $T \to \infty$ の極限にいくことはできない. このデルタ関数には除去できない幅 $\Delta E \simeq 1/T \gtrsim 1/\tau_\alpha$ があるので, (3.4.13) は全崩壊率 $1/\tau_\alpha$ が過程の特徴的なエネルギーのどれよりもはるかに小さい場合にのみ有用だ.

$\boldsymbol{N_\alpha = 2}$**:**

この場合は遷移率 (3.4.11) は $1/V$, すなわち一方の粒子の他方の粒子の位置での密度に比例する. 実験家が報告するのは一般に, 密度当たりの遷移率ではなく, **粒子束当たりの反応率** (rate per flux) , つまり**断面積** (cross-section) だ. どちらかの粒子の相手の粒子の位置での粒

子束は密度 $1/V$ と相対速度 u_α の積,

$$\Phi_\alpha = u_\alpha / V \tag{3.4.14}$$

で定義される. (u_α の一般的な定義は以下で与えるが, とりあえずどちらかの粒子が静止していれば u_α は他方の粒子の速度と定義されるとしておこう.) すると微分断面積は,

$$d\sigma(\alpha \to \beta) \equiv d\Gamma(\alpha \to \beta)/\Phi_\alpha = (2\pi)^4 u_\alpha^{-1} |M_{\beta\alpha}|^2 \delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta \tag{3.4.15}$$

だ.

$N_\alpha = 1$ と $N_\alpha = 2$ の場合が最も重要だが, $N_\alpha \geq 3$ の場合の遷移率も全て原理的に測定可能であり, そのいくつかは化学や天体物理等で非常に重要だ. (例えば, 太陽内部でエネルギーを解放する主要な反応の一つでは, 2 個の陽子と 1 個の電子が重水素とニュートリノに変換する.) 3.6 節では始状態の粒子数が一般的な数 N_α の場合の遷移率の基本公式 (3.4.11) の応用を与える.

次に遷移率と断面積のローレンツ変換性の問題を考察する. これは (3.4.15) の相対速度 u_α のより一般的な定義を与えるのに役立つ. S 行列のローレンツ変換性 (3.3.1) は各粒子のスピンに付随した運動量に依存する行列のために複雑だ. この複雑さを避けるために, (ローレンツ不変なデルタ関数を (3.4.12) から取り除いた後に) (3.3.1) の絶対値の 2 乗を考え, あらゆるスピンについて和をとる. 行列 $D^{(j)}_{\bar{\sigma}\sigma}(W)$ (あるいは質量ゼロの場合はそれに対応する行列) のユニタリー性より, (3.3.1) のエネルギー因子を除いて, 和はローレンツ不変だ. すなわち,

$$\sum_{\text{spins}} |M_{\beta\alpha}|^2 \prod_\beta E \prod_\alpha E \equiv R_{\beta\alpha} \tag{3.4.16}$$

という量は状態 α と β の粒子の 4 元運動量のスカラー関数だ. ($\prod_\alpha E$ と $\prod_\beta E$ の積は, 状態 α と β の粒子の全ての 1 粒子エネルギー $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ の積の意味だ.)

スピンの和をとった 1 粒子の崩壊率 (3.4.13) は今や,

$$\sum_{\text{spins}} d\Gamma(\alpha \to \beta) = 2\pi E_\alpha^{-1} R_{\beta\alpha} \delta^4(p_\beta - p_\alpha) d\beta / \prod_\beta E$$

と書ける. 因子 $d\beta/\prod_\beta E$ は, 運動量空間のローレンツ不変な体積要素 (2.5.15) の積なので, ローレンツ不変だ. $R_{\beta\alpha}$ と $\delta^4(p_\beta - p_\alpha)$ もまたローレンツ不変であり, 始状態の 1 粒子のエネルギーを E_α として, 因子 $1/E_\alpha$ だけがローレンツ不変でない. よって我々の結論は, 崩壊率が $1/E_\alpha$ と同じローレンツ変換性を持つということだ. これはもちろん, まさに通常の特殊相対論の時間の遅れであり, 粒子が速く運動すればするほど, ゆっくり崩壊することに対応する.

同様にスピン和をとった断面積 (3.4.15) は, 始状態 α の 2 粒子のエネルギーを E_1, E_2 として,

$$\sum_{\text{spins}} d\sigma(\alpha \to \beta) = (2\pi)^4 u_\alpha^{-1} E_1^{-1} E_2^{-1} R_{\beta\alpha} \delta^4(p_\alpha - p_\beta) d\beta / \prod_\beta E$$

と書ける. 断面積は (スピン和をとれば)4 元運動量のローレンツ不変な関数となるように定義するのが慣例だ. 因子 $R_{\beta\alpha}$, $\delta^4(p_\beta - p_\alpha)$ と $d\beta/\prod_\beta E$ はすでにローレンツ不変なので, これより, 任意の慣性系における相対速度 u_α を $u_\alpha E_1 E_2$ がローレンツスカラーとなるように定義しなければならない. またすでに述べたように, 一方の粒子 (例えば粒子 1) が静止しているローレンツ系では, u_α は他方の粒子の速度だ. このことから, u_α の値は一般のローレンツ系において,

$$u_\alpha = \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \Big/ E_1 E_2 \tag{3.4.17}$$

と一意的に定まる.* ここで p_1, p_2 と m_1, m_2 は始状態 α の 2 粒子の

*(3.4.17) より $E_1 E_2 u_\alpha$ がスカラーであることは明らかだ. また粒子 1 が静止しているとき, $\mathbf{p}_1 = 0$, $E_1 = m_1$, よって $p_1 \cdot p_2 = -m_1 E_2$, さらに (3.4.17) より

$$u_\alpha = \sqrt{E_2^2 - m_2^2}/E_2 = |\mathbf{p}_2|/E_2$$

となりこれはちょうど粒子 2 の速度だ.

4 元運動量と質量だ.

全 3 元運動量がゼロになる「重心系 (center-of-mass frame)」では,

$$p_1 = (\mathbf{p}, E_1)\ , \qquad p_2 = (-\mathbf{p}, E_2)$$

であり, (3.4.17) より, 相対速度に期待されるとおりに,

$$u_\alpha = \frac{|\mathbf{p}|(E_1 + E_2)}{E_1 E_2} = \left|\frac{\mathbf{p}_1}{E_1} - \frac{\mathbf{p}_2}{E_2}\right| \tag{3.4.18}$$

が得られる. しかし, この系では u_α は実際には物理的な速度ではなく, 特に (3.4.18) は極度に相対論的な粒子の場合には 2 に近い値をとれることを示している.

次に遷移率の一般式 (3.4.11) や崩壊率 (3.4.13) と断面積 (3.4.15) に現れるいわゆる位相空間 (phase-space) の因子 $\delta^4(p_\beta - p_\alpha)d\beta$ の議論に移る. ここでは始状態の全 3 元運動量が,

$$\mathbf{p}_\alpha = 0 \tag{3.4.19}$$

となる重心系の場合に話を限る. ($N_\alpha = 1$ についてはこれはちょうど崩壊粒子が静止している場合だ.) 終状態が運動量 $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2, \cdots$ の粒子から成るとすると, $E \equiv E_\alpha$ を始状態の全エネルギーとして,

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha)d\beta = \delta^3(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 + \cdots)\delta(E'_1 + E'_2 + \cdots - E)d^3p'_1 d^3p'_2 \cdots \tag{3.4.20}$$

となる. $\mathbf{p}'_k$ の任意の一つ, 例えば $\mathbf{p}'_1$ についての積分は単に, 運動量デルタ関数を落とし,

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha)d\beta \to \delta(E'_1 + E'_2 + \cdots - E)d^3p'_2 \cdots \tag{3.4.21}$$

(E'_1 のように) $\mathbf{p}'_1$ が現れれば常に,

$$\mathbf{p}'_1 = -\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}'_3 - \cdots \tag{3.4.22}$$

の置き換えをするだけでよい. 同様に残ったデルタ関数を用いて任意の1個の積分を取り除ける.

最も簡単なのは終状態が2粒子だけの場合だ. この場合, (3.4.21) は,

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha)d\beta \to \delta(E_1' + E_2' - E)d^3\mathbf{p}_2'$$

となる. 詳しくいうとこれは,

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha)d\beta \to$$
$$\delta\left(\sqrt{|\mathbf{p}_1{}'|^2 + m_1'^2} + \sqrt{|\mathbf{p}_1{}'|^2 + m_2'^2} - E\right)|\mathbf{p}_1{}'|^2 d|\mathbf{p}_1{}'|d\Omega \quad (3.4.23)$$

だ. ここで,

$$\mathbf{p}_2' = -\mathbf{p}_1' ,$$

また $d\Omega \equiv \sin\theta\, d\theta\, d\phi$ は $\mathbf{p}_1{}'$ の立体角微分だ. これは, $x = x_0$ にだけ1位のゼロ点をもつ任意の実関数について成り立つ標準的な式,

$$\delta(f(x)) = \delta(x - x_0)/\,|f'(x_0)|$$

を用いれば簡単になる. 今の場合 (3.4.23) のデルタ関数の引数 $E_1' + E_2' - E$ は $|\mathbf{p}_1'| = k'$ にだけゼロ点を持つ. ここで,

$$k' = \sqrt{(E^2 - m_1'^2 - m_2'^2)^2 - 4m_1'^2 m_2'^2}/2E , \quad (3.4.24)$$

$$E_1' = \sqrt{k'^2 + m_1'^2} = \frac{E^2 - m_2'^2 + m_1'^2}{2E} , \quad (3.4.25)$$

$$E_2' = \sqrt{k'^2 + m_2'^2} = \frac{E^2 - m_1'^2 + m_2'^2}{2E} , \quad (3.4.26)$$

また引数の微分は,

$$\left[\frac{d}{d|\mathbf{p}_1{}'|}\left(\sqrt{|\mathbf{p}_1{}'|^2 + m_1'^2} + \sqrt{|\mathbf{p}_1{}'|^2 + m_2'^2} - E\right)\right]_{|\mathbf{p}_1'|=k'}$$
$$= \frac{k'}{E_1'} + \frac{k'}{E_2'} = \frac{k'E}{E_1'E_2'} \quad (3.4.27)$$

だ. このようにして (3.4.23) のデルタ関数と微分 $d|\mathbf{p}_1{}'|$ は, (3.4.27) で割って, k', E_1', E_2' が全て (3.4.24)–(3.4.26) で与えられると理解することにすると, 落とすことができ,

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha)d\beta \to \frac{k' E_1' E_2'}{E} d\Omega \tag{3.4.28}$$

を得る. 特に運動量ゼロ, エネルギー E の 1 粒子状態の 2 粒子への微分崩壊率 (3.4.13) は,

$$\frac{d\Gamma(\alpha \to \beta)}{d\Omega} = \frac{2\pi k' E_1' E_2'}{E} |M_{\beta\alpha}|^2 \tag{3.4.29}$$

であり, 2 体散乱過程 $1\,2 \to 1'2'$ の微分断面積は (3.4.15) より, $k \equiv |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$ として,

$$\frac{d\sigma(\alpha \to \beta)}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^4 k' E_1' E_2'}{E u_\alpha} |M_{\beta\alpha}|^2 = \frac{(2\pi)^4 k' E_1' E_2' E_1 E_2}{E^2 k} |M_{\beta\alpha}|^2 \tag{3.4.30}$$

で与えられる.

上の $N_\beta = 2$ の場合は特に簡単だが, $N_\beta = 3$ の場合も記録に値するおもしろい結果が一つある. $N_\beta = 3$ の場合 (3.4.21) より

$$\delta^4(p_\beta - p_\alpha)d\beta \to d^3\mathbf{p}_2'\, d^3\mathbf{p}_3' \times \delta\left(\sqrt{(\mathbf{p}_2' + \mathbf{p}_3')^2 + m_1'^2} + \sqrt{\mathbf{p}_2'^2 + m_2'^2} + \sqrt{\mathbf{p}_3'^2 + m_3'^2} - E\right)$$

となる. $d\Omega_3$ を $\mathbf{p}_3'$ の微分立体角要素, θ_{23} と ϕ_{23} を $\mathbf{p}_3'$ に相対的な $\mathbf{p}_2'$ の極角と方位角として, 運動量空間の体積を,

$$d^3p_2'\, d^3p_3' = |\mathbf{p}_2'|^2\, d|\mathbf{p}_2'|\, |\mathbf{p}_3'|^2\, d|\mathbf{p}_3'|\, d\Omega_3\, d\phi_{23}\, d\cos\theta_{23}$$

と書く. $\mathbf{p}_2'$ と $\mathbf{p}_3'$ が張る平面の向きは ϕ_{23} と $\mathbf{p}_3'$ の向きで指定され, 残りの角度 θ_{23} はエネルギー保存の条件,

$$\sqrt{\mathbf{p}_2'^2 + 2|\mathbf{p}_2'|\,|\mathbf{p}_3'|\cos\theta_{23} + |\mathbf{p}_3'|^2 + m_1'^2} + \sqrt{|\mathbf{p}_2'|^2 + m_2'^2} + \sqrt{|\mathbf{p}_3'^2| + m_3'^2} = E$$

で決まる. デルタ関数の引数の $\cos\theta_{23}$ に関する微分は,

$$\frac{\partial E'_1}{\partial\cos\theta_{23}}=\frac{|\mathbf{p}'_2||\mathbf{p}'_3|}{E'_1}$$

なので, $\cos\theta_{23}$ の積分はデルタ関数を落としてこの微分で割れば得られる.

$$\delta^4(p_\beta-p_\alpha)d\beta\to|\mathbf{p}'_2|\,d|\mathbf{p}'_2|\;|\mathbf{p}'_3|\,d|\mathbf{p}'_3|\;E'_1\,d\Omega_3\,d\phi_{23}\;.$$

運動量をエネルギーで置き換えると, これは最終的に,

$$\delta^4(p_\beta-p_\alpha)d\beta\to E'_1\,E'_2\,E'_3\;dE'_2dE'_3\;d\Omega_3\,d\phi_{23} \tag{3.4.31}$$

となる. しかし, $|M_{\beta\alpha}|^2$ のスピン和をとりエネルギーの積をかけて得られた (3.4.16) は 4 元運動量のスカラー関数だ. もしこのスカラー関数を定数と近似すると, (3.4.31) より初期状態を固定したとき E'_2,E'_3 面に描いた反応事象の分布は一様なことがわかる. この散布図における事象の一様分布からのずれは, 遠心力障壁や中間共鳴状態の可能性を含めた崩壊過程の力学の有用な手がかりとなる. これは, ダリッツ (Dalitz)[19] が 1953 年に $K^+\to\pi^++\pi^++\pi^-$ の崩壊を解析するのに用いたので, ダリッツ・プロットとして知られている.

3.5 摂動論

S 行列を計算する上で歴史的にみて最も有用な技法は摂動論, すなわちハミルトニアン $H=H_0+V$ の相互作用項 V の冪での展開だ. (3.2.7) と (3.1.18) から S 行列は,

$$S_{\beta\alpha}=\delta(\beta-\alpha)-2i\pi\delta(E_\beta-E_\alpha)T_{\beta\alpha}{}^+\;,$$
$$T_{\beta\alpha}{}^+=(\Phi_\beta,V\Psi_\alpha{}^+)$$

と表せる. ここで $\Psi_\alpha{}^+$ はリップマン・シュウィンガー方程式 (3.1.17) を満たす.

$$\Psi_\alpha{}^+ = \Phi_\alpha + \int d\gamma \, \frac{T_{\gamma\alpha}{}^+ \Phi_\gamma}{E_\alpha - E_\gamma + i\epsilon}.$$

この方程式に V を作用させ Φ_β とのスカラー積をとると, T^+ に対する積分方程式,

$$T_{\beta\alpha}{}^+ = V_{\beta\alpha} + \int d\gamma \, \frac{V_{\beta\gamma} T_{\gamma\alpha}{}^+}{E_\alpha - E_\gamma + i\epsilon} \tag{3.5.1}$$

が得られる. ここで

$$V_{\beta\alpha} \equiv (\Phi_\beta, V\Phi_\alpha) \tag{3.5.2}$$

だ. $T_{\beta\alpha}{}^+$ の摂動級数は (3.5.1) を繰り返し用いて得られる.

$$T_{\beta\alpha}{}^+ = V_{\beta\alpha} + \int d\gamma \, \frac{V_{\beta\gamma} V_{\gamma\alpha}}{E_\alpha - E_\gamma + i\epsilon} + \int d\gamma d\gamma' \, \frac{V_{\beta\gamma} V_{\gamma\gamma'} V_{\gamma'\alpha}}{(E_\alpha - E_\gamma + i\epsilon)(E_\alpha - E_{\gamma'} + i\epsilon)} + \cdots. \tag{3.5.3}$$

(3.5.3) に基づく計算法は 1930 代の S 行列の計算に最もよく使われたが, 今日では旧式の摂動論として知られている. その明白な欠点はエネルギー分母が S 行列が持っているローレンツ不変性を見えにくくしていることだ. しかし, S 行列の非正則性が様々な中間状態からどのように生じるかを明らかにするのには役立つ. この本の大部分では, (3.5.3) を書き換えた**時間に依存する摂動論** (time-dependent perturbation theory) として知られているものを用いる. これはローレンツ不変性をはるかに見えやすくする長所があるが, 個々の中間状態の寄与を幾分わかりにくくしてしまう.

時間に依存する摂動論を導く最も簡単な方法は, (3.2.5) を用いて S 演算子を

$$S = U(\infty, -\infty)$$

と表すことだ. ここで,

$$U(\tau,\tau_0)\equiv\exp(iH_0\tau)\exp(-iH(\tau-\tau_0))\exp(-iH_0\tau_0)$$

だ. この $U(\tau,\tau_0)$ の 式を τ で微分すると微分方程式,

$$i\frac{d}{d\tau}U(\tau,\tau_0)=V(\tau)U(\tau,\tau_0) \tag{3.5.4}$$

が得られる. ここで,

$$V(t)\equiv\exp(iH_0t)V\exp(-iH_0t) \tag{3.5.5}$$

だ. (演算子のこの種の時間依存性は, 量子力学のハイゼンベルグ表示で要求される $O_H(t)=\exp(iHt)O_H\exp(-iHt)$ の時間依存性とは異なるので, 区別するために**相互作用表示** (interaction picture) で定義されているという.) 積分方程式,

$$U(\tau,\tau_0)=1-i\int_{\tau_0}^{\tau}dt\,V(t)U(t,\tau_0) \tag{3.5.6}$$

の解は, (3.5.4) と初期条件 $U(\tau_0,\tau_0)=1$ を明らかに満たす. この積分方程式を繰り返せば $U(\tau,\tau_0)$ の V に関する冪展開,

$$\begin{aligned}U(\tau,\tau_0)=1&-i\int_{\tau_0}^{\tau}dt_1\,V(t_1)+(-i)^2\int_{\tau_0}^{\tau}dt_1\int_{\tau_0}^{t_1}dt_2\,V(t_1)V(t_2)\\&+(-i)^3\int_{\tau_0}^{\tau}dt_1\int_{\tau_0}^{t_1}dt_2\int_{\tau_0}^{t_2}dt_3\,V(t_1)V(t_2)V(t_3)+\cdots\end{aligned} \tag{3.5.7}$$

を得る. $\tau=\infty$ および $\tau_0=-\infty$ をとれば S 演算子の摂動展開,

$$\begin{aligned}S=1&-i\int_{-\infty}^{\infty}dt_1V(t_1)+(-i)^2\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{t_1}dt_2\,V(t_1)V(t_2)\\&+(-i)^3\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\int_{-\infty}^{t_1}dt_2\int_{-\infty}^{t_2}dt_3\,V(t_1)V(t_2)V(t_3)+\cdots\end{aligned} \tag{3.5.8}$$

を得る. これはまた旧式の摂動展開 (3.5.3) でエネルギー因子のフーリエ表示,

$$(E_\alpha-E_\gamma+i\epsilon)^{-1}=-i\int_0^{\infty}d\tau\exp(i(E_\alpha-E_\gamma)\tau) \tag{3.5.9}$$

を用いて直接導くこともできる. ただしそのような積分は被積分関数の中に収束因子 $e^{-\epsilon\tau}$ を挿入し $\epsilon \to 0+$ ととって評価するものとする.

(3.5.8) を書き換えて明白にローレンツ不変な計算を実行できる. 時間に依存する任意の演算子の**時間順序積** (time-ordered product) を, 時間が最も遅い演算子が最も左に来て, 次に遅い演算子がその右に来て, . . . というように各演算子を並べ替えた積で定義する. 例えば,

$$T\{V(t)\} = V(t)\ ,$$
$$T\{V(t_1)V(t_2)\} = \theta(t_1 - t_2)V(t_1)V(t_2) + \theta(t_2 - t_1)V(t_2)V(t_1)$$

といった具合だ. ここで, $\theta(\tau)$ は $\tau > 0$ のとき $+1$, また $\tau < 0$ のときゼロの階段関数だ. n 個の V の時間順序積は V の $n!$ 通りのあらゆる置換についての和で, その和の各々の項は $t_1 \cdots t_n$ 全体で積分すると同じ寄与を与え, よって (3.5.8) は,

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \dots dt_n\, T\Big\{V(t_1) \cdots V(t_n)\Big\} \quad (3.5.10)$$

と書き直すことができる. これは**ダイソンの級数** (Dyson series) [20]としても知られている. この級数は異なる時刻の $V(t)$ が全て交換するなら, たし上げることができ, 和は

$$S = \exp\left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt\, V(t)\right)$$

となる. もちろん, 通常これは正しくない. 一般に (3.5.10) は収斂さえせず, せいぜい V に現れる結合定数の漸近展開だ. しかし (3.5.10) は一般の場合に,

$$S = T\exp\left(-i \int_{-\infty}^{\infty} dt\, V(t)\right)$$

と書かれることもある. ここで T は指数関数の級数展開の各項を時間の順序に並べて評価するという意味だ.

S 行列が明白にローレンツ不変な一つの大きな部類の理論を容易に見つけることができる. S 行列の要素は S 演算子の Φ_α, Φ_β 等自由粒子状態間の行列要素なので, 示したいことは S 演算子がこれらの自由粒子状態にローレンツ変換を生成する演算子 $U_0(\Lambda, a)$ と交換しなければならないということだ. すなわち, S 演算子は $U_0(\Lambda, a)$ の生成子 H_0, $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{J}_0$, $\mathbf{K}_0$ と交換しなければならない. この要求を満たすために, $V(t)$ が 3 次元空間の積分,

$$V(t) = \int d^3x\, \mathcal{H}(\mathbf{x}, t) \tag{3.5.11}$$

であり, $\mathcal{H}(x)$ が,

$$U_0(\Lambda, a)\mathcal{H}(x)U_0^{-1}(\Lambda, a) = \mathcal{H}(\Lambda x + a) \tag{3.5.12}$$

の意味でスカラーだと仮定してみよう. (微小変換の場合の a^0 の係数を等しくおけば, $\mathcal{H}(x)$ の時間依存性が (3.5.5) と矛盾しないことを確認できる.) すると, S は 4 次元積分の和,

$$S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n\, T\Big\{\mathcal{H}(x_1)\cdots\mathcal{H}(x_n)\Big\} \tag{3.5.13}$$

と書ける. これで演算子の時間順序積を除いて, 全てが明白にローレンツ不変だ.

さて, 時空の 2 点 x_1, x_2 の時間順序は, $x_1 - x_2$ が空間的, すなわち $(x_1 - x_2)^2 > 0$ でなければローレンツ不変なので, $\mathcal{H}(x)$ が空間的または光錐的* に離れているときにすべて交換すれば (そのときだけに限らないが),

$$[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')] = 0 \quad \text{for} \quad (x - x')^2 \geq 0 \tag{3.5.14}$$

(3.5.13) の時間順序での並べ替えによって特別なローレンツ系が導入されることはない. 3.3 節の結果を用いると, (3.5.12) と (3.5.14) を満

*6 章で見るように $x = x'$ での厄介な特異性のためにローレンツ不変性が乱される可能性があるので, ここでは x と x' の条件を $(x - x')^2 > 0$ ではなく $(x - x')^2 \geq 0$ と書いている.

たす相互作用 (3.5.11) が正しいローレンツ変換性を持つ S 行列を導くことの, 形式的な非摂動論的証明を与えることができる. 微小なブーストに対して, (3.5.12) は

$$i[\mathbf{K}_0, \mathcal{H}(\mathbf{x}, t)] = t\boldsymbol{\nabla}\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{x}\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{H}(\mathbf{x}, t) \tag{3.5.15}$$

を与え, $\mathbf{x}$ で積分して $t = 0$ と置くと,

$$[\mathbf{K}_0, V] = \left[\mathbf{K}_0, \int d^3x\, \mathcal{H}(\mathbf{x}, 0)\right] = [H_0, \mathbf{W}] \tag{3.5.16}$$

となる. ここで,

$$\mathbf{W} \equiv \int d^3x\, \mathbf{x}\,\mathcal{H}(\mathbf{x}, 0) \tag{3.5.17}$$

だ. H_0 の固有状態に関する $\mathcal{H}(\mathbf{x}, 0)$ の行列要素がエネルギー固有値の滑らかな関数であるなら (通常この仮定は正しい), 同じことが V についても成り立つが, それは散乱理論が正しいために必要であり, また $\mathbf{W}$ についても成り立つが, それはローレンツ不変性の証明に必要だ. ローレンツ不変性の他の条件である交換関係 (3.3.21) もまた,

$$0 = [\mathbf{W}, V] = \int d^3x \int d^3y\, \mathbf{x}\, [\mathcal{H}(\mathbf{x}, 0), \mathcal{H}(\mathbf{y}, 0)] \tag{3.5.18}$$

ならば, またそのときに限り, 正しい. この条件は「因果律」の条件 (3.5.14) から導かれるが, S 行列のローレンツ不変性に対するいくぶん制限の緩い十分条件を与える.

この部類の理論がローレンツ不変な唯一のものではないが, 最も一般的なローレンツ不変な理論はそれほど違いがない. 特に, (3.5.14) のような交換関係が常に満たされている必要がある. 時間順序が常にガリレイ不変である非相対論的な系には, この条件に対応するものがない. ローレンツ不変性と量子力学を結合させる際に大きな制限となるのがこの条件だ.

* * *

この節でこれまでに述べた方法は, 相互作用演算子 V が充分小さいときに有用だ. この近似の修正版で**歪曲波ボルン近似** (distorted-wave Born approximation) として知られているものもあり, それは相互作用が,

$$V = V_{\rm s} + V_{\rm w} \tag{3.5.19}$$

のように弱い項 $V_{\rm w}$ と強い項 $V_{\rm s}$ の二つの項を含む場合に有用だ. $\Psi_{{\rm s}\alpha}{}^{\pm}$ を, $V_{\rm s}$ を全相互作用としたときの「in」状態と「out」状態,

$$\Psi_{{\rm s}\alpha}{}^{\pm} = \Phi_\alpha + (E_\alpha - H_0 \pm i\epsilon)^{-1} V_{\rm s} \Psi_{{\rm s}\alpha}{}^{\pm} \tag{3.5.20}$$

と定義する. すると (3.1.16) は,

$$\begin{aligned} T_{\beta\alpha}{}^{+} &= (\Phi_\beta, V\Psi_\alpha{}^{+}) \\ &= \left(\left[\Psi_{{\rm s}\beta}{}^{-} - (E_\beta - H_0 - i\epsilon)^{-1} V_{\rm s}\Psi_{{\rm s}\beta}{}^{-}\right], (V_{\rm s} + V_{\rm w})\Psi_\alpha{}^{+}\right) \\ &= \left(\Psi_{{\rm s}\beta}{}^{-}, V_{\rm w}\Psi_\alpha{}^{+}\right) \\ &\quad + \left(\Psi_{{\rm s}\beta}{}^{-}, \left[V_{\rm s} - V_{\rm s}(E_\beta - H_0 + i\epsilon)^{-1}(V_{\rm s} + V_{\rm w})\right]\Psi_\alpha{}^{+}\right) \end{aligned}$$

と書け, よって,

$$T_{\beta\alpha}{}^{+} = (\Psi_{{\rm s}\beta}{}^{-}, V_{\rm w}\Psi_\alpha{}^{+}) + (\Psi_{{\rm s}\beta}{}^{-}, V_{\rm s}\Phi_\alpha) \tag{3.5.21}$$

となる. 右辺の第 2 項はちょうど, 強い相互作用のみが存在するときの $T_{\beta\alpha}{}^{+}$ だ.

$$T_{{\rm s}\ \beta\alpha}{}^{+} \equiv (\Phi_\beta, V_{\rm s}\Psi_{s\alpha}{}^{+}) = (\Psi_{{\rm s}\beta}{}^{-}, V_{\rm s}\Phi_\alpha). \tag{3.5.22}$$

((3.5.22) の証明には (3.5.21) の導出で全ての $V_{\rm w}$ を単に落とせばよい.) (3.5.21) はこの第 2 項がゼロになるとき, すなわち過程 $\alpha \to \beta$ が強い相互作用だけでは生成されないときに最も有用だ. (例えば, 原子核のベータ崩壊では, 原子核の始状態と終状態に作用する強い核力の存在を無視することはできないが, 中性子を陽子に転換するには弱い相互

作用が必要だ.) そのような過程では, 行列要素 (3.5.22) はゼロになり, よって (3.5.21) は,

$$T_{\beta\alpha}{}^{+} = (\Psi_{s\beta}{}^{-},\ V_{\rm w}\Psi_{\alpha}{}^{+}) \tag{3.5.23}$$

となる.

これまでのところは全て正確だ. しかし, T 行列をこのように書き換えるのが有用なのは, (3.5.23) の状態 $\Psi_\alpha{}^+$ への $V_{\rm w}$ の影響が無視できるほど弱くて, $\Psi_\alpha{}^+$ を強い相互作用 $V_{\rm s}$ のみを考慮した状態 $\Psi_{{\rm s}\alpha}{}^+$ で置き換えてよいときだ. この近似では (3.5.23) は,

$$T_{\beta\alpha}{}^{+} \simeq (\Psi_{{\rm s}\beta}{}^{-},\ V_{\rm w}\Psi_{s\alpha}{}^{+}) \tag{3.5.24}$$

となる. これは $V_{\rm w}$ の 1 次で正しいが, $V_{\rm s}$ については全次数で正しい. この近似は物理の至る所に登場する. 例えば, 原子核のベータ崩壊やガンマ崩壊の S 行列要素は, (3.5.24) を用いて $V_{\rm s}$ を原子核の強い相互作用とし, $V_{\rm w}$ をそれぞれ原子核の弱い相互作用または電磁相互作用として, さらに $\Psi_{{\rm s}\beta}{}^-$ と $\Psi_{s\alpha}{}^+$ を原子核の終状態と始状態として, 計算される.

3.6　ユニタリー性の意味

S 行列のユニタリー性は, 任意の多粒子状態 α の前方散乱振幅 $M_{\alpha\alpha}$ をその状態の全ての反応の全確率と関連付ける興味ある有用な条件を課す. 一般の場合, 状態 β が状態 α と同じか否かにかかわらず, S 行列は (3.3.2) のように,

$$S_{\beta\alpha} = \delta(\beta-\alpha) - 2\pi i\delta^4(p_\beta - p_\alpha)M_{\beta\alpha}$$

と書けることを思いだそう. するとユニタリー条件は,

$$\delta(\gamma-\alpha) = \int d\beta\, S^*_{\beta\gamma}S_{\beta\alpha} = \delta(\gamma-\alpha) - 2\pi i\delta^4(p_\gamma - p_\alpha)M_{\gamma\alpha}$$

$$+2\pi i\delta^4(p_\gamma - p_\alpha)M^*_{\alpha\gamma} + 4\pi^2\int d\beta\,\delta^4(p_\beta - p_\gamma)\delta^4(p_\beta - p_\alpha)M^*_{\beta\gamma}M_{\beta\alpha}$$

となる. $\delta(\gamma-\alpha)$ の項と $2\pi\delta^4(p_\gamma - p_\alpha)$ の因子を落とすと, $p_\gamma = p_\alpha$ のとき,

$$0 = -iM_{\gamma\alpha} + iM^*_{\alpha\gamma} + 2\pi\int d\beta\,\delta^4(p_\beta - p_\alpha)M^*_{\beta\gamma}M_{\beta\alpha} \tag{3.6.1}$$

が得られる. これは $\alpha = \gamma$ のとき最も有用であり,

$$\mathrm{Im}\, M_{\alpha\alpha} = -\pi\int d\beta\,\delta^4(p_\beta - p_\alpha)|M_{\beta\alpha}|^2 \tag{3.6.2}$$

となる. (3.4.11) を用いると, これは体積 V 中の始状態 α により生成される全ての反応の全反応率の公式,

$$\begin{aligned}\Gamma_\alpha &\equiv \int d\beta\,\frac{d\Gamma(\alpha\to\beta)}{d\beta}\\ &= (2\pi)^{3N_\alpha - 2}V^{1-N_\alpha}\int d\beta\,\delta^4(p_\beta - p_\alpha)|M_{\beta\alpha}|^2\\ &= -\frac{1}{\pi}(2\pi)^{3N_\alpha-2}V^{1-N_\alpha}\,\mathrm{Im}\,M_{\alpha\alpha}\end{aligned} \tag{3.6.3}$$

として表現できる.

特に α が 2 粒子状態のとき, これは,

$$\mathrm{Im}\,M_{\alpha\alpha} = -u_\alpha\sigma_\alpha/16\pi^3 \tag{3.6.4}$$

と書ける. ここで u_α は状態 α の相対速度 (3.4.17), また σ_α はこの状態の**全断面積** (total cross-section) で, (3.4.15) より,

$$\sigma_\alpha \equiv \int d\beta\; d\sigma(\alpha\to\beta)/d\beta = (2\pi)^4 u_\alpha^{-1}\int d\beta\,|M_{\beta\alpha}|^2\delta^4(p_\beta - p_\alpha) \tag{3.6.5}$$

で与えられる. これは通常**散乱振幅** (scattering amplitude) $f(\alpha\to\beta)$ を用いて少し異なった風に表される. (3.4.30) は, 重心系での 2 体散乱の微分断面積が, k と k' を始状態と終状態の運動量の大きさとして,

$$\frac{d\sigma(\alpha\to\beta)}{d\Omega} = \frac{(2\pi)^4 k' E_1' E_2' E_1 E_2}{kE^2}|M_{\beta\alpha}|^2 \tag{3.6.6}$$

となることを示している. そこで散乱振幅を*

$$f(\alpha \to \beta) \equiv -\frac{4\pi^2}{E}\sqrt{\frac{k' E_1' E_2' E_1 E_2}{k}}\, M_{\beta\alpha} \tag{3.6.7}$$

と定義すると, 微分断面積は単に,

$$\frac{d\sigma(\alpha \to \beta)}{d\Omega} = |f(\alpha \to \beta)|^2 \tag{3.6.8}$$

となる. 特に, 2 体**弾性散乱** (elastic scattering) の場合,

$$f(\alpha \to \beta) \equiv -\frac{4\pi^2 E_1 E_2}{E} M_{\beta\alpha} \tag{3.6.9}$$

を得る. 相対速度 u_α に (3.4.18) を用いれば, ユニタリー性の予言 (3.6.3) は今度は

$$\mathrm{Im}\, f(\alpha \to \alpha) = \frac{k}{4\pi}\sigma_\alpha \tag{3.6.10}$$

と表せる. ユニタリー条件 (3.6.3) をこの形に表したものは, **光学定理** (optical theorem) [22]として知られている.

高エネルギー散乱について多くのことを教えてくれる, 光学定理のすばらしい結果がある. 散乱振幅 f は角度の滑らかな関数だと期待してよいので, $|f|^2$ が前方散乱のときと (例えば因子 2 の範囲内で) ほとんど同じ値を持つ立体角 $\Delta\Omega$ があるはずだ. すると, 全断面積は,

$$\sigma_\alpha \geq \int |f|^2 d\Omega \geq \frac{1}{2}\,|f(\alpha \to \alpha)|^2 \Delta\Omega \geq \frac{1}{2}\,|\mathrm{Im}\, f(\alpha \to \alpha)|^2 \Delta\Omega$$

で抑えられる. そこで (3.6.10) を用いると $\Delta\Omega$ の上限が得られる.

$$\Delta\Omega \leq 32\pi^2 / k^2 \sigma_\alpha \ . \tag{3.6.11}$$

次節で見るように, 全断面積は高エネルギーでは通常定数に近づくかゆっくり増加するので, (3.6.11) は, 微分断面積がほぼ一定である前方

---

*f の位相は慣習上のものであり, f を時間に依存しないシュレーディンガー方程式の解の出ていく波の係数とみなす量子力学的解釈[21]が動機になっている. ここで使う f の規格化は非弾性散乱については若干慣習からはずれており, 通常 f は終状態と始状態の速度の比が微分断面積の式に現れるように定義される.

散乱の周りの立体角は $k \to \infty$ のとき少なくとも $1/k^2$ の速さで縮んでいく. この高エネルギーでの前方散乱のだんだん狭くなるピークは, **回折ピーク** (diffraction peak) として知られている.

任意個の粒子を含む一般的な反応の場合に戻って, (3.6.2) を CPT 不変性といっしょに用いると, 粒子と反粒子の全反応率について言えることがある. CPT は反ユニタリーなので, その保存は, 一般には $\alpha \to \beta$ の過程と粒子をその反粒子で置き換えた過程との間のどのような簡単な関係も意味しない. その代わりに, ある過程とその反粒子を含む逆過程との関係を与える. すなわち, 時間反転不変性から (3.3.46) を導いたのと同じ議論をすると, CPT 不変性により S 行列が条件,

$$S_{\beta,\alpha} = S_{\mathcal{CPT}\alpha\,,\,\mathcal{CPT}\beta} \tag{3.6.12}$$

を満たすことを示せる. ここで $\mathcal{CPT}$ は, 全てのスピンの z 成分を反転し, 全ての粒子を対応する反粒子に変え, 行列要素に始状態の粒子の様々な位相因子と終状態の粒子の位相因子の複素共役をかけることを表す. CPT 不変性はまた粒子がその対応する反粒子と同じ質量を持つことを要求するので, $S_{\beta\alpha}$ の $\delta^4(p_\alpha - p_\beta)$ の係数についても同じ関係が成り立つ.

$$M_{\beta\,,\,\alpha} = M_{\mathcal{CPT}\alpha\,,\,\mathcal{CPT}\beta}\ . \tag{3.6.13}$$

特に, 始状態と終状態が同じとき位相因子は全て相殺し, (3.6.13) は,

$$\begin{aligned} &M_{p_1\sigma_1 n_1;\, p_2\sigma_2 n_2;\,\cdots\,,\, p_1\sigma_1 n_1;\, p_2\sigma_2 n_2;\,\cdots} \\ &\quad = M_{p_1 -\sigma_1 n_1^c;\, p_2 -\sigma_2 n_2^c;\,\cdots\,,\, p_1 -\sigma_1 n_1^c;\, p_2 -\sigma_2 n_2^c;\,\cdots} \end{aligned} \tag{3.6.14}$$

ということになる. ここで n の上付きの添字 c は n の反粒子を表す. 一般化された光学定理 (3.6.2) はそこである粒子の組から成る始状態の全反応率はスピンを反転した対応する反粒子から成る始状態の場合と同じだということを教えてくれる.

$$\Gamma_{p_1\sigma_1 n_1;\, p_2\sigma_2 n_2;\,\cdots} = \Gamma_{p_1 -\sigma_1 n_1^c;\, p_2 -\sigma_2 n_2^c;\,\cdots}\ . \tag{3.6.15}$$

特に, これを 1 粒子状態に適用すると, 任意の粒子の崩壊率はスピンを反転した反粒子の崩壊率に等しいことがわかる. 回転不変性より粒子の崩壊率はスピンの z 成分によらないので, 一般的な結果 (3.6.15) の特殊な場合として, 不安定粒子とその対応する反粒子とは正確に同じ寿命を持つことが言える.

* * *

ユニタリー条件 $S^\dagger S = 1$ から (3.6.2) を導いたのと同じ議論により, もう一方のユニタリー条件 $SS^\dagger = 1$ を用いて,

$$\mathrm{Im}\, M_{\alpha\alpha} = -\pi \int d\beta\, \delta^4(p_\beta - p_\alpha)|M_{\alpha\beta}|^2 \tag{3.6.16}$$

を導くことができる. これと (3.6.2) より, 逆反応の関係式,

$$\int d\beta\, \delta^4(p_\beta - p_\alpha)|M_{\beta\alpha}|^2 = \int d\beta\, \delta^4(p_\beta - p_\alpha)|M_{\alpha\beta}|^2 \tag{3.6.17}$$

すなわち $c_\alpha \equiv [V/(2\pi)^3]^{N_\alpha}$ として,

$$\int d\beta\, c_\alpha \frac{d\Gamma(\alpha \to \beta)}{d\beta} = \int d\beta\, c_\beta \frac{d\Gamma(\beta \to \alpha)}{d\alpha} \tag{3.6.18}$$

が得られる. この結果は熱力学の最も重要な結果のいくつかを導くのに使える.[23] 系が多粒子状態 Φ_α の空間の体積 $d\alpha$ 内に見出される確率を $P_\alpha d\alpha$ とすると, P_α が他の全ての状態への遷移によって減少する率は $P_\alpha \int d\beta\, d\Gamma(\alpha \to \beta)/d\beta$ で, 一方 P_α が他の全ての状態からの遷移によって増加する率は $\int d\beta\, P_\beta\, d\Gamma(\beta \to \alpha)/d\alpha$ だ. よって P_α の変化率は,

$$\frac{dP_\alpha}{dt} = \int d\beta\, P_\beta \frac{d\Gamma(\beta \to \alpha)}{d\alpha} - P_\alpha \int d\beta \frac{d\Gamma(\alpha \to \beta)}{d\beta} \tag{3.6.19}$$

だ. $\int P_\alpha d\alpha$ が時間に依存しないことは直ちにわかる. ((3.6.19) の第 2 項の積分の積分変数の名前を入れ替えるだけでよい.) 他方, エントロピー $-\int d\alpha\, P_\alpha \ln(P_\alpha/c_\alpha)$ の変化率は,

$$-\frac{d}{dt}\int d\alpha\, P_\alpha \ln(P_\alpha/c_\alpha) = -\int d\alpha \int d\beta \Big(\ln(P_\alpha/c_\alpha) + 1\Big)$$

$$\times \left[P_\beta \frac{d\Gamma(\beta \to \alpha)}{d\alpha} - P_\alpha \frac{d\Gamma(\alpha \to \beta)}{d\beta}\right]$$

となる. 第 2 項の積分変数の名前を入れ替えると, これは,

$$-\frac{d}{dt}\int d\alpha\ P_\alpha\ \ln(P_\alpha/c_\alpha) = \int d\alpha \int d\beta\ P_\beta\ \ln\left(\frac{P_\beta c_\alpha}{P_\alpha c_\beta}\right) \frac{d\Gamma(\beta \to \alpha)}{d\alpha}$$

と書ける. 任意の正の量 x と y について, 関数 $y\ln(y/x)$ は不等式**

$$y\ \ln\left(\frac{y}{x}\right) \geq y - x$$

を満たす. よってエントロピーの変化率は,

$$-\frac{d}{dt}\int d\alpha\ P_\alpha\ \ln(P_\alpha/c_\alpha) \geq \int d\alpha \int d\beta\ \left[\frac{P_\beta}{c_\beta} - \frac{P_\alpha}{c_\alpha}\right] c_\beta \frac{d\Gamma(\beta \to \alpha)}{d\alpha}$$

あるいは, 第 2 項の積分変数を入れ替えて,

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt}&\int d\alpha\ P_\alpha\ \ln(P_\alpha/c_\alpha) \\ &\geq \int d\alpha \int d\beta\ \frac{P_\beta}{c_\beta}\left[c_\beta \frac{d\Gamma(\beta \to \alpha)}{d\alpha} - c_\alpha \frac{d\Gamma(\alpha \to \beta)}{d\beta}\right] \end{aligned}$$

で抑えられる. しかしユニタリー性の関係式 (3.6.18) より (α と β を入れ替えて), この不等式の右辺の α の積分はゼロになり, よってエントロピーは常に増加する.

$$-\frac{d}{dt}\int d\alpha\ P_\alpha\ \ln(P_\alpha/c_\alpha) \geq 0\,. \tag{3.6.20}$$

これは「ボルツマンの H 定理」だ. この定理は統計力学の教科書では, しばしば, $|M_{\beta\alpha}|^2$ が α と β について対称で $c_\beta d\Gamma(\beta \to \alpha)/d\alpha = c_\alpha d\Gamma(\alpha \to \beta)/d\beta$ となるボルン近似を用いるか, あるいは $|M_{\beta\alpha}|^2$ が α と β を入れ替えかつ全ての運動量とスピンを反転させたとき変化しないという時間反転不変性を仮定するかのどちらかで導出されて

**左辺と右辺の差は $x \to y$ のとき正の量 $(x-y)^2/2y$ に近づき, x に関する微分は全ての $x > y$ または $x < y$ についてそれぞれ正または負だ.

いる. もちろん, ボルン近似も時間反転不変性も正確ではないので, ユニタリー性の結果 (3.6.18) だけが H 定理を導くのに必要なのは良いことだ.

確率 P_α が全エネルギーや全電荷のような保存量のみの関数に c_α をかけたものになれば, エントロピーの増加は止まる. この場合保存則より $P_\alpha/c_\alpha = P_\beta/c_\beta$ でない限り $d\Gamma(\beta \to \alpha)/d\alpha$ はゼロになり, よって (3.6.19) の第 1 項の P_β を $P_\alpha c_\beta/c_\alpha$ で置き換えれる. 再度 (3.6.18) を用いるとこの場合 P_α は時間に依存しなくなる. ここでも再び, ユニタリー性の関係式 (3.6.18) だけが必要で, ボルン近似や時間反転不変性は不要だ.

3.7 部分波展開*

S 行列を, 全運動量と全エネルギー以外の全ての変数が離散的な自由粒子状態の基底で取り扱うのがしばしば便利だ. これは, 一定の全運動量 $\mathbf{p}$ と全エネルギー E をもった n 粒子状態の運動量 $\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n$ の成分は $(3n-4)$ 次元の**コンパクト空間** (compact space) を形成するので, 可能だ. 例えば, $\mathbf{p}=0$ の重心系で $n=2$ 粒子の場合, この空間は 2 次元球面だ. そのようなコンパクト空間上の関数は, 2 次元球面上の一般の関数を表現するのに使われる球面調和関数のような, 一般化された「部分波 (partial wave)」で級数展開できる. すると, これらの n 粒子状態の連続変数 $\mathbf{p}$ と E 以外は離散的な基底を定義できる. そのような基底での自由粒子状態を $\Phi_{E\,\mathbf{p}\,N}$ と記述する. ここで添字 N は, 一般化された部分波を記述する全ての添字とともに全てのスピンと粒子の種類の添字を含む. これらの状態はスカラー積が,

$$\left(\Phi_{E'\,\mathbf{p}'\,N'}, \Phi_{E\,\mathbf{p}\,N}\right) = \delta(E'-E)\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\delta_{N',N} \tag{3.7.1}$$

*この節はこの本の展開の主要な流れからははずれており, 最初に読むときは省略してもよい.

と規格化されるように選ぶのが便利だ. すると S 演算子はこの基底では,

$$\left(\Phi_{E'\,\mathbf{p}'\,N'}\,,\; S\Phi_{E\,\mathbf{p}\,N}\right) = \delta(E'-E)\delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})S_{N',N}(E,\mathbf{p}) \qquad (3.7.2)$$

の形の行列要素を持ち, $S_{N',N}$ はユニタリー行列だ. 同様に, T 演算子は, その自由粒子行列要素 $(\Phi_\beta, T\Phi_\alpha)$ が (3.1.18) で定義した量 $T_{\beta\alpha}{}^{+}$ に等しくなるように定義されるが, 今の新しい基底では ((3.4.12) に対応して),

$$\left(\Phi_{E\,\mathbf{p}'\,N'},\; T\Phi_{E\,\mathbf{p}\,N}\right) = \delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})M_{N',N}(E,\mathbf{p}) \qquad (3.7.3)$$

となり, 関係式 (3.2.7) はここでは通常の行列の方程式

$$S_{N',N}(E,\mathbf{p}) = \delta_{N',N} - 2i\pi M_{N',N}(E,\mathbf{p}) \qquad (3.7.4)$$

になる. この一般的な形式は次節で用いるが, いまのところ始状態が 2 個の粒子だけを含む反応に話を限ろう.

例えば, ゼロでない質量 M_1, M_2 と任意のスピン s_1, s_2 をもつ 異なる種類 n_1, n_2 の 2 個の粒子からなる状態を考えよう. この場合, 状態は全運動量 $\mathbf{p}=\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2$, 全エネルギー E, 粒子の種類 n_1, n_2, スピンの z 成分 σ_1, σ_2, および状態の例えば $\mathbf{p}_1$ の方向に対する依存性を特定する 2 個の整数 ℓ, m ($|m| \leq \ell$) で指定される. あるいは, クレブシュ・ゴルダン (Clebsch–Gordan) 係数[9]を用いて 2 個のスピンを 全スピン s, その z 成分 μ に合成し, さらにクレブシュ・ゴルダン係数を再度用いてこの全スピンと軌道角運動量 ℓ, その第 3 成分 m を全角運動量 j, その第 3 成分 σ に合成して, 便利な離散的基底を作ることもできる. これにより状態の基底 $\Phi_{E\mathbf{p}\,j\sigma\ell s n}$ (n は 2 粒子の種類を表す「チャンネル指標」 n_1, n_2 だ) が得られ, それは各々の粒子が一定の運動量とスピンの第 3 成分をもつ状態との内積が,

$$\left(\Phi_{\mathbf{p}_1\,\sigma_1\,\mathbf{p}_2\,\sigma_2\,n'}\,,\; \Phi_{E\,\mathbf{p}\,j\sigma\ell s n}\right) \equiv (|\mathbf{p}_1|E_1E_2/E)^{-1/2}\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2)$$

$$\times\,\delta\left(E-\sqrt{\mathbf{p}_1^2+M_1^2}-\sqrt{\mathbf{p}_2^2+M_2^2}\right)\delta_{n',n}$$
$$\times\sum_{m,\mu}C_{s_1s_2}(s,\mu;\sigma_1,\sigma_2)\;C_{\ell s}(j,\sigma;m,\mu)Y_\ell^m(\hat{\mathbf{p}}_1) \qquad (3.7.5)$$

となるように定義される. ここで Y_ℓ^m は通常の球面調和関数[24]だ. 因子 $(|\mathbf{p}_1|E_1E_2/E)^{-1/2}$ が挿入されているのは, 重心系でこれらの状態が,

$$\left(\Phi_{E'\,\mathbf{p}'\,j'\,\sigma'\,\ell'\,s'\,n'},\;\Phi_{E\,0\,j\,\sigma\,\ell\,s\,n}\right)=\delta^3(\mathbf{p}')\delta^3(E'-E)\delta_{j',j}\delta_{\sigma',\sigma}\delta_{\ell',\ell}\delta_{s',s}\delta_{n',n} \qquad (3.7.6)$$

と正しく規格化されるようにするためだ. 同一粒子の場合には, 重複して数えることを避けるために 2 粒子の運動量空間の半分についてだけ積分しなければならない. よって内積 (3.7.6) には余分な因子 $\sqrt{2}$ を付ける必要がある.

重心系では, 運動量を保存し回転不変な任意の演算子 O の行列要素は,

$$\left(\Phi_{E\,\mathbf{p}'\,j'\,\sigma'\,\ell'\,s'\,n'}\;,\;O\,\Phi_{E\,0\,j\,\sigma\,\ell\,s\,n}\right)=\delta^3(\mathbf{p}')O^j_{\ell'\,s'\,n',\ell\,s\,n}(E)\delta_{jj'}\delta_{\sigma\sigma'} \qquad (3.7.7)$$

の形をとらなければならない. (これが j と σ について対角的であるのは, O が $\mathbf{J}^2$ および J_3 と交換するからであり, $\delta_{\sigma\sigma'}$ の係数が σ に依らないのは O が $J_1\pm iJ_2$ と交換するからだ. これはウィグナー・エッカルト (Wigner–Eckart) の定理として知られている一般的な結果の特別な例だ.[25]) これをその行列要素が $M_{\beta\alpha}$ である演算子 M に適用すると, 重心系での散乱振幅 (3.6.7) が,

$$\begin{aligned}&f(\mathbf{k}\,\sigma_1,-\mathbf{k}\,\sigma_2,n\;\to\;\mathbf{k}'\,\sigma_1',-\mathbf{k}'\,\sigma_2',n')\\&\equiv-4\pi^2\sqrt{\frac{k'E_1'E_2'E_1E_2}{E^2k}}\,M_{\mathbf{k}'\,\sigma_1'\,-\mathbf{k}'\,\sigma_2'\,n',\,\mathbf{k}\,\sigma_1\,-\mathbf{k}\,\sigma_2\,n}\\&=-\frac{4\pi^2}{k}\sum_{j\sigma\ell'm's'\mu'\ell ms\mu}C_{s_1s_2}(s,\mu;\sigma_1,\sigma_2)C_{\ell s}(j,\sigma;m,\mu)\end{aligned}$$

$$\times\, C_{s_1' s_2'}(s',\mu';\sigma_1',\sigma_2')C_{\ell' s'}(j,\sigma;m',\mu')$$
$$\times\, Y_{\ell'}^{m'}(\hat{\mathbf{k}}')Y_{\ell}^{m*}(\hat{\mathbf{k}})M^{j}_{\ell' s' n',\, \ell s n}(E) \tag{3.7.8}$$

の形をとることがわかる.

微分散乱断面積は $|f|^2$ だ. 始状態の運動量 $\mathbf{k}$ の方向を 3 軸方向にとると,

$$Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}}) = \delta_{m0}\sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \tag{3.7.9}$$

だ. $|f|^2$ を終状態の運動量 $\mathbf{k}'$ の方向について積分し終状態と始状態のスピンの第 3 成分についてそれぞれ和と平均をとれば, チャンネル n から n' への全断面積** は,

$$\sigma(n\to n';E) = \frac{\pi}{k^2(2s_1+1)(2s_2+1)}\sum_{j\,\ell\, s\, \ell'\, s'}(2j+1)$$
$$\times\left|\delta_{\ell'\ell}\delta_{s's}\delta_{n'n} - S^{j}_{\ell' s' n',\ell s n}(E)\right|^2 \tag{3.7.10}$$

で与えられる. 全ての 2 体チャンネルについて (3.7.10) の和をとると, 弾性および非弾性 2 体反応の全断面積,

$$\sum_{n'}\sigma(n\to n';E) = \frac{\pi}{k^2(2s_1+1)(2s_2+1)}\sum_{j\,\ell\, s}(2j+1)$$
$$\times\left[(1-S^j(E))^\dagger(1-S^j(E))\right]_{\ell s n,\ell s n} \tag{3.7.11}$$

**この結果を導く際に, クレブシュ・ゴルダン係数の標準的な和則[9]を用いる. すなわちまず,

$$\sum_{\sigma_1,\sigma_2} C_{s_1,s_2}(s,\mu;\sigma_1,\sigma_2)C_{s_1,s_2}(\bar{s},\bar{\mu};\sigma_1,\sigma_2) = \delta_{s\bar{s}}\delta_{\mu\bar{\mu}}$$

および ' が付いた同じ式を用い, 次に,

$$\sum_{m\tilde{\sigma}} C_{\ell s}(j,\sigma;m,\tilde{\sigma})C_{\ell s}(\bar{j},\bar{\sigma};m,\tilde{\sigma}) = \delta_{j\bar{j}}\delta_{\sigma\bar{\sigma}}$$

そして最後に,

$$\sum_{\sigma\mu} C_{\ell s}(j,\sigma;0,\mu)C_{\bar{\ell} s}(j,\sigma;0,\mu) = \frac{2j+1}{2\ell+1}\delta_{\bar{\ell}\ell}$$

を用いる.

を得る. 比較のために, (3.7.8), (3.7.9), (3.7.4) とクレブシュ・ゴルダンの和則 ** を用いると, スピン平均をとった前方散乱振幅,

$$f(n;E) = \frac{i}{2k(2s_1+1)(2s_2+1)} \sum_{j\ell s}(2j+1)[1-S^j_{\ell sn,\ell sn}]$$

が得られる. すると光学定理 (3.6.10) より全断面積は,

$$\sigma_{\rm total}(n;E) = \frac{2\pi}{k^2(2s_1+1)(2s_2+1)} \sum_{j\ell s}(2j+1)\,{\rm Re}\,[1-S^j(E)]_{\ell sn,\ell sn} \tag{3.7.12}$$

となる. エネルギー E のときチャンネル n から到達できるのが 2 体チャンネルのみの場合には, 行列 $S^j(E)$ (あるいは少なくともチャンネル n を含む部分行列) はユニタリーであり, よって,

$$\left[(1-S^j(E))^\dagger(1-S^j(E))\right]_{\ell sn,\ell sn} = 2\,{\rm Re}\,[1-S^j(E)]_{\ell sn,\ell sn} \tag{3.7.13}$$

となり (3.7.12) と (3.7.11) は等しい. 他方, 3 個あるいはそれ以上の粒子を含むチャンネルが開いていれば, (3.7.12) と (3.7.11) の差は余分な粒子を生成する全断面積,

$$\sigma_{\rm production}(n;E) = \frac{\pi}{k^2(2s_1+1)(2s_2+1)} \sum_{j\ell s}(2j+1) \times \left[1-S^j(E)^\dagger S^j(E)\right]_{\ell sn,\ell sn} \tag{3.7.14}$$

を与え, これは正でなければならない.

部分波展開は, S 行列の問題になっている部分が対角的である場合に特に有用だ. これが成り立つのは, 例えば, (弱い相互作用と電磁相互作用を無視するなら) エネルギーが余分なパイオンを生成する閾値以下での $\pi^+-\pi^+$ や $\pi^+-\pi^0$ の散乱のように, 始状態のチャンネル n が 2 個のスピンゼロ粒子のみを含み他のチャンネルはこのエネルギーでは開いていない場合だ. 2 個のスピンゼロ粒子の場合, $j=\ell$ であり, 角運動量保存則より S 行列は対角的だ. スピンを持つ粒子を含

む過程でも, S 行列が対角的になることがあり得る. 例えば, パイオン–核子散乱では $j=\ell+\frac{1}{2}$ または $j=\ell-\frac{1}{2}$ をとれるが, 与えられた j に対してこれら二つの状態は逆パリティを持つので, S 行列で結びつけない. いずれの場合にも, ある n と E に対して N' が 2 体状態 j,ℓ,s,n でなければ S 行列要素 $S_{N',j\ell sn}(E,0)$ が全てゼロになるなら, ユニタリー性より,

$$S^{j}_{\ell's'n',\ell sn}(E)=\exp\left[2i\delta_{j\ell sn}(E)\right]\delta_{\ell'\ell}\delta_{s's}\delta_{n'n} \tag{3.7.15}$$

となる. ここで, $\delta_{j\ell sn}(E)$ は実位相で一般に**位相のずれ** (phase shift) として知られている. この公式は, S 行列の 2 体部分は対角的だが 3 個以上の粒子を含むチャンネルも開いている場合にしばしば用いられる. そのような場合, (3.7.14) が正であるためには位相のずれは正の虚数部を持たねばならない. 位相のずれが実の場合, 弾性散乱の断面積と全断面積は (3.7.10) または (3.7.12) より,

$$\begin{aligned}\sigma(n\to n;E)&=\sigma_{\text{total}}(n;E)\\&=\frac{4\pi}{k^2(2s_1+1)(2s_2+1)}\sum_{j\,\ell\,s}(2j+1)\sin^2\delta_{j\ell sn}(E)\end{aligned} \tag{3.7.16}$$

で与えられる. このよく知られた結果は通常, 非相対論的な量子力学でポテンシャル中の粒子の座標空間の波動関数を調べて導かれる. ここで, 上のような導出を示したのは, 部分波展開が相対論的な速度での弾性散乱についても適用できることを示すためと, それが特別な力学的仮定に依らずユニタリー性と不変性原理のみに依ることを強調するためだ.

ある内部対称群の数個の規約表現を形成するいくつかのチャンネルが開いているときの問題を扱う際にも, 位相のずれを導入するのはしばしば有益だ. そのような内部対称性の典型的な例はアイソスピン対称性だ. この場合, チャンネルの指標 n には 2 粒子のアイソスピン T_1,

T_2 とその第 3 成分 t_1, t_2 の指定が含まれる. チャンネル n の状態は規約表現 T の第 t 成分の線形結合で表され, その係数はよく知られたクレブシュ・ゴルダン係数 $C_{T_1T_2}(T,t:t_1,t_2)$ だ. 今考えているチャンネルとエネルギーについて S 行列は j, T, t ばかりでなく ℓ と s についても対角的だとしよう. ユニタリー性とアイソスピン対称性より S 行列は,

$$S^j_{\ell'\,s'\,T'\,t',\ell\,s\,T\,t} = \exp[2i\delta_{j\,\ell\,s\,T}(E)]\delta_{\ell'\,\ell}\delta_{s'\,s}\delta_{T'\,T}\delta_{t'\,t}. \tag{3.7.17}$$

と書ける. ここで, $\delta_{j\,\ell\,s\,T}(E)$ はヴィグナー・エッカルトの定理に従って t に依らない実の位相のずれだ. 部分断面積はふたたび (3.7.10) から計算でき, 全断面積は (3.7.12) より,

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{total}}(t_1,t_2;E) &= \frac{4\pi}{k^2(2s_1+1)(2s_2+1)}\\ &\times \sum_{j\ell sTt}(2j+1)C_{T_1,T_2}(T,t;t_1,t_2)^2\sin^2\delta_{j\ell sT}(E)\end{aligned} \tag{3.7.18}$$

と与えられる. 例えば, パイオン–パイオン散乱では偶数の ℓ に対しては $T=0$ または $T=2$ の, また奇数の ℓ に対しては $T=1$ の位相のずれ $\delta_{\ell\,\ell\,0\,T}(E)$ があり, 一方パイオン–核子散乱の場合には, $T=\frac{1}{2}$ または $T=\frac{3}{2}$ の位相のずれ $\delta_{j\,j\pm\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,T}$ がある.

どのような力学的仮定にもほとんど依らない解析的考察から散乱振幅と位相のずれの閾値での振舞いについて有用な知見を得ることができる. 運動量空間における特異性を生じる特別な事情がなければ, 行列要素 $M_{\mathbf{k}'\,\sigma_1'\,-\mathbf{k}'\,\sigma_2'\,n',\,\mathbf{k}\,\sigma_1\,-\mathbf{k}\,\sigma_2\,n}$ は $k=0$ か $k'=0$ または (弾性散乱の場合には) $k=k'=0$ の近傍で $\mathbf{k}$ と $\mathbf{k}'$ の解析関数[†] だと期待される. M の部分波展開 (3.7.8) に戻ると, $k^\ell Y_\ell^m(\hat{\mathbf{k}})$ は 3 元ベクトル $\mathbf{k}$ の単純な多項式であり, よって $M_{\mathbf{k}'\,\sigma_1'\,-\mathbf{k}'\,\sigma_2'\,n',\,\mathbf{k}\,\sigma_1\,-\mathbf{k}\,\sigma_2\,n}$ が $k=0$ ま

[†]例えば, ボルン近似 (3.2.8) では M は座標空間での相互作用の行列要素のフーリエ変換に比例し, よってこれらの行列要素が遠距離で十分速くゼロになる限り運動量ゼロで解析的だ. 主な例外はクーロン力のような遠距離力がはたらく場合の散乱だ.

たは $k'=0$ の近傍で 3 元運動量 $\mathbf{k}$ と $\mathbf{k}'$ の解析関数であるためには, k または k' か, k と k' の両方がゼロに近づくとき, 係数 $M^j_{\ell' s' n', \ell s n}$ あるいは同じことだが $\delta_{\ell'\ell}\delta_{s's}\delta_{n'n}-S^j_{\ell's'n',\ell sn}$ が $k^{\ell+\frac{1}{2}}k'^{\ell+\frac{1}{2}}$ のように振舞う必要がある. よって小さな k または k' か, k と k' の両方に対して, 散乱振幅に認め得るほどの寄与をするのは始状態または終状態か, 始状態と終状態の両方の最低次の部分波だけだ. 可能性としては以下の三つの場合がある.

発熱反応

この場合, $k \to 0$ のとき k' は有限値に近づき, この極限では $\delta_{\ell'\ell}\delta_{s's}\delta_{n'n}-S^j_{\ell's'n',\ell sn}$ は $k^{\ell+\frac{1}{2}}$ のように振舞う. この場合, その反応が起こる最低の軌道角運動量を ℓ として, 断面積 (3.7.11) は $k^{2\ell-1}$ のように振舞う. 最も普通の場合 $\ell=0$ なので, 反応断面積は $1/k$ のように振舞う. (これは例えば, 複雑な原子核による遅い中性子の吸収や低エネルギーの電子–陽電子対消滅による光子の発生において, クーロン力の高次効果を除いて成り立っている.) 反応率は断面積と k のように振舞う粒子束の積なので, 発熱反応の反応率は $k \to 0$ のとき定数のように振る舞う. しかし, 与えられた厚さの標的を粒子束が通過する際の吸収確率を決めるのは反応率ではなく断面積なので, ホウ素のような吸収物質中の遅い中性子の場合に因子 $1/k$ はこの確率を非常に高める.

吸熱反応

この場合, k が有限の閾値に達し $k'=0$ となるまで反応は禁止される. この閾値のすぐ上で $\delta_{\ell'\ell}\delta_{s's}\delta_{n'n}-S^j_{\ell's'n',\ell sn}$ は $(k')^{\ell'+\frac{1}{2}}$ のように振舞う. この場合断面積 (3.7.11) は, 閾値で生成され得る最低の軌道角運動量を ℓ' として $(k')^{2\ell'+1}$ のように振舞う. 最も普通の場合 $\ell'=0$ であるので, 反応断面積は閾値より上で k' すなわち $\sqrt{E-E_{\text{threshold}}}$

のように振舞う. (これは例えば, ストレンジ粒子の対生成や光子散乱での電子–陽電子対生成において成り立っている.)

弾性反応

この場合は $k = k'$ なので k と k' は同時にゼロになる. (これは $n' = n$ の場合, または n' が n と同じアイソスピン多重項の粒子から成る場合に成立する.) 弾性散乱では $\ell = \ell' = 0$ の部分波が常に存在するので, $k \to 0$ の極限で散乱振幅 (3.7.8) は,

$$f(\mathbf{k}, \sigma_1, -\mathbf{k}, \sigma_2, n \ \to\ \mathbf{k}', \sigma_1', -\mathbf{k}', \sigma_2', n') \quad \to \\ \sum_{s\sigma} C_{s_1 s_2}(s, \sigma; \sigma_1, \sigma_2) C_{s_1' s_2'}(s, \sigma; \sigma_1', \sigma_2')\, a_s(n \to n') \quad (3.7.19)$$

のように定数になる. ここで a は**散乱半径** (scattering length) として知られる定数で, それは $k = k' \to 0$ のときの極限,

$$S^s_{0sn',0sn} \to \delta_{n',n} + 2ika_s(n \to n') \quad (3.7.20)$$

で定義される. $4\pi|f|^2$ を終状態のスピンについて和をとり始状態のスピンについて平均すると, $k = k' = 0$ での遷移 $n \to n'$ の全断面積,

$$\sigma(n \to n'; k = 0) = \frac{4\pi}{(2s_1 + 1)(2s_2 + 1)} \sum_s (2s + 1) a_s^2(n \to n') \quad (3.7.21)$$

が得られる. この公式を用いる典型的な例は中性子–陽子散乱だが, その散乱では二つの散乱半径があり, スピン 1 重項の散乱半径 a_0 はスピン 3 重項の散乱半径 a_1 よりかなり長い.

部分波展開はまた, 高エネルギーでの断面積の振舞いを大まかに推察するのに用いることもできる. 波長が短くなると, 散乱はある程度古典的に記述されることが期待できる. つまり運動量 k と軌道角運動量 ℓ を持つ粒子は衝突径数 (impact parameter) ℓ/k を持ち, よって

$\ell \le kR$ なら半径 R の円盤をたたくであろう. これは S 行列要素について, R_n をチャンネル n のある種の相互作用半径として,

$$S^j_{\ell s n, \ell s n} \to \begin{cases} 0 & \ell \ll kR_n \\ 1 & \ell \gg kR_n \end{cases} \tag{3.7.22}$$

ということと解釈できる. 与えられた $\ell \gg s$ に対して $2s+1$ 個の j があり, それらは全て ℓ に近いので $2j+1 \simeq 2\ell+1$ と近似でき, よって (3.7.12) の j と s に関する和は単に,

$$\sum_{js}(2j+1) = (2\ell+1)\sum_s(2s+1) = (2\ell+1)(2s_1+1)(2s_2+1)$$

の程度の因子を与える. すると $k \gg 1/R_n$ のとき (3.7.12) より全断面積は,

$$\sigma_{\text{total}}(n; E) \to \frac{2\pi}{k^2} \sum_{\ell \le kR_n} (2\ell+1) \to 2\pi R_n^2 \tag{3.7.23}$$

となる. 全く同様に, (3.7.10) は弾性散乱断面積,

$$\sigma(n \to n; E) \to \pi R_n^2 \tag{3.7.24}$$

を与える. (3.7.23) と (3.7.24) の差より, 非弾性断面積 πR_n^2 が得られるが, それは半径 R_n の不透明な円盤との衝突で期待されるものだ. (弾性散乱の断面積が πR_n^2 なのは多少驚くべきことだが, これは円盤による回折に帰することができる.) 他方, (3.7.22) に従って $S^j_{\ell s n, \ell s n}$ は衝突径数 ℓ/k が $\ell/k = R_n$ 近傍の小さな幅 $\Delta_n \ll R_n$ に入るときだけ複素数になると仮定すると, 不等式 $|\mathrm{Im}\,(1 - S^j_{\ell s n, \ell s n})| \le 2$ を用いて, 同じ解析により前方散乱振幅の実部に対する制限,

$$|\mathrm{Re}\, f(n; E)| \le 2k\, R_n \Delta_n \ll |\mathrm{Im}\, f(n; E)| \tag{3.7.25}$$

が得られる. 高エネルギーで前方散乱振幅の実部が小さくなることは実験で確かめられている.

ここまでは相互作用半径 R_n 自身がエネルギーに依存しうるかどうかについては何も言っていない. 非常に粗い推察としては, R_n は湯川ポテンシャル (1.2.74) の因子 $\exp(-\mu r)$ が E のある未知の冪に比例する値を取る距離と考えることができるが, その場合 R_n は $E \to \infty$ で $\log E$ のように振舞い, 断面積は $(\log E)^2$ のように振舞う. 極めて一般的な仮定から全断面積が $E \to \infty$ で $(\log E)^2$ より速くは大きくなれないことが厳密に証明されている.[26] 実際, 観測された陽子–陽子の全断面積は高エネルギーで $(\log E)^2$ のように増大し, よって高エネルギー散乱のこの大まかな描像は何らかの意味で現実と対応しているようだ.

3.8 共鳴状態*

多粒子衝突に加わる粒子が, 単一の不安定粒子 R から成る中間状態を形成し, それが崩壊してできる粒子が最終的に終状態として観測されることも, しばしば起こる. R の全崩壊率が小さければ, 断面積は中間状態 R のエネルギーで, **共鳴状態** (resonance) として知られている急激な変化 (通常はピーク) を示す.

共鳴状態の近くでの断面積の振舞いはユニタリー条件のみでほとんど規定されることを見る. これは, ほとんど安定な状態を生成する機構にはいくつかの非常に異なるものがある事を考えれば, 便利なことだ.

(a) 最も簡単な可能性は, ハミルトニアンが, 粒子 R を固有状態として含む「強い」ハミルトニアン $H_0 + V_\mathrm{s}$ と, R を衝突過程の始状態と終状態 α, β を含む様々な状態に崩壊させる弱い摂動 V_w の二つの部分に分解できる場合だ. 例えば $j = 1$ と質量 91 GeV を持つ中性粒子

*この節はこの本の展開の主要な流れからは若干はずれており, 最初に読むときは省略してもよい.

Z^0 が存在するが, それは電弱相互作用がなければ安定だ. この相互作用により Z^0 が電子–陽電子対, ミューオン–反ミューオン対等に崩壊するが, その全崩壊率は Z^0 の質量よりずっと小さい. Z^0 粒子は 1989 年にセルン (CERN) とスタンフォード (Stanford) の電子–陽電子衝突において $e^+ + e^- \to Z^0 \to e^+ + e^-$, $e^+ + e^- \to Z^0 \to \mu^+ + \mu^-$ 等の反応で共鳴状態** として観測された.

(b) ある場合には粒子は, ポテンシャル障壁によりその構成粒子が外に飛び出すことをほとんど妨げられるために, 長寿命になる. その典型的な例は原子核のアルファ崩壊だ. 原子核がアルファ粒子 (He^4 原子核) を放出することはエネルギー的には可能かもしれないが, アルファ粒子とその原子核の強い静電反発力が娘核のまわりに障壁領域を作り出し, そこにアルファ粒子が進入することは古典的に禁止される. 崩壊は, 量子力学的に障壁を透過することによってのみ起こり得るので, 指数関数的に遅い. そのような不安定状態はアルファ粒子と娘核の散乱で共鳴状態として現れる. 例えば, Be^8核の最低エネルギー状態は 2 個のアルファ粒子への崩壊に対して不安定であり, He^4–He^4 散乱において共鳴状態として見える. (アルファ, ベータ, ガンマ崩壊に対して不安定な高スピン原子核については, クーロン障壁に加えて, 遠心力障壁が寿命を長くしている.)

(c) 複雑な系が, ポテンシャル障壁も弱い相互作用もないのに, 統計的な理由で長い寿命を持つことが可能だ. 例えば, 重い原子核の励起状態は, そのエネルギーの大部分が統計的なゆらぎによって 1 個の中性子に集中して初めて, 崩壊可能になることがある. この状態は娘核による中性子の散乱において共鳴状態として現れる.

**ついでながら, この例は共鳴状態が相対的にゆっくり崩壊すればよいことを示している. Z^0 の寿命は 2.6×10^{-25} 秒で, それは光速に近い速さで運動する Z^0 が原子核を横切るには短すぎる. 重要なことは崩壊率が静止系での Z^0 の波動関数の振動数 $\hbar/M_Z$ より 36 倍小さいことだ.

長寿命状態を生み出すこれらの機構は非常に異なっている. しかし, 本当に幸運なことに, 共鳴状態の性質の大部分は, 共鳴状態を生み出す力学的機構によらず, ユニタリー性だけから導かれる.

最初に, 共鳴状態近傍での反応の行列要素のエネルギー依存性を考察しよう. 「in」状態の波束 $\int d\alpha\, g(\alpha)\Psi_\alpha{}^+ \exp(-iE_\alpha t)$ は (3.1.19) の時間依存性,

$$\int d\alpha\, g(\alpha)\Psi_\alpha^+ e^{-iE_\alpha t} = \int d\alpha\, g(\alpha)\Phi_\alpha e^{-iE_\alpha t} + \int d\beta\, \Phi_\beta \int d\alpha\, \frac{e^{-iE_\alpha t}\, g(\alpha)\, T_{\beta\alpha}{}^+}{E_\alpha - E_\beta + i\epsilon} .$$

を持つ. 3.1 節で述べたように, 関数 $T_{\beta\alpha}{}^+$ の E_α の複素下半面での極は $t \to \infty$ で指数関数的にゼロになる寄与を第 2 項に与える. 特に, $E_\alpha = E_R - i\Gamma/2$ の極は振幅に $\exp(-iE_R t - \Gamma t/2)$ の振舞いをする項を与え, それは確率が $\exp(-\Gamma t)$ で小さくなる状態に対応する. 結局, エネルギー E_R, 遅い崩壊率 Γ を持つ長寿命状態は

$$T_{\beta\alpha}{}^+ \sim (E_\alpha - E_R + i\Gamma/2)^{-1} + \text{ constant} \tag{3.8.1}$$

のように変化する項を散乱振幅に与える.

さらに進むには, 基底として前節で議論した離散的な正規直交多粒子状態 $\Phi_{\mathbf{p}EN}$ をとるのが便利だ. ここで, $\mathbf{p}$ と E は全運動量と全エネルギー, また N は離散的な (ただし無限に多くの) 値のみをとる指標だ. この基底では, S 行列は,

$$S_{\mathbf{p}'E'N',\, \mathbf{p}EN} = \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\delta(E' - E)S_{N'N}(\mathbf{p}, E) \tag{3.8.2}$$

と書ける. 共鳴状態付近では, 重心系の振幅 $S(0, E) \equiv \mathcal{S}(E)$ が,

$$\mathcal{S}_{N'N}(E) \equiv S_{N'N}(0, E) = \mathcal{S}_{0N'N} + \frac{\mathcal{R}_{N'N}}{E - E_R + i\Gamma/2} \tag{3.8.3}$$

の形を持つことが期待される. ここで, $\mathcal{S}_0$ と $\mathcal{R}$ は少なくとも相対的に小さなエネルギー範囲 $|E - E_R| \lesssim \Gamma$ で近似的に定数だ.

この基底では, S 行列のユニタリー性は通常の行列方程式,

$$\mathcal{S}(E)^\dagger \mathcal{S}(E) = 1 \tag{3.8.4}$$

だ. (3.8.3) に適用すると, これは共鳴的でない背景の S 行列が,

$$\mathcal{S}_0{}^\dagger \mathcal{S}_0 = 1 \tag{3.8.5}$$

とユニタリーであることと, 留数行列 $\mathcal{R}$ が二つの条件,

$$\mathcal{S}_0{}^\dagger \mathcal{R} - \mathcal{R}^\dagger \mathcal{S}_0 = 0 \tag{3.8.6}$$

と

$$-\frac{i}{2}\Gamma \mathcal{S}_0{}^\dagger \mathcal{R} + \frac{i}{2}\Gamma \mathcal{R}^\dagger \mathcal{S}_0 + \mathcal{R}^\dagger \mathcal{R} = 0 \tag{3.8.7}$$

を満たすことを示している. これらの条件は,

$$\mathcal{R} \equiv -i\Gamma \mathcal{A} \mathcal{S}_0 \tag{3.8.8}$$

と置くことによって, より見通しのよい形にできる. そうすると行列 $\mathcal{A}$ のユニタリー条件は単に,

$$\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}\,, \qquad \mathcal{A}^2 = \mathcal{A} \tag{3.8.9}$$

となる. 任意のそのようなエルミートな冪等 (idempotent) 行列は**射影行列** (projection matrix) と呼ばれる. そのような行列は常に正規直交ベクトル $u^{(r)}$ のディアード (dyad) の和で,

$$\mathcal{A}_{N'N} = \sum_r u^{(r)}_{N'}\, u^{(r)*}_N\,, \qquad \sum_N u^{(r)*}_N\, u^{(s)}_N = \delta_{rs} \tag{3.8.10}$$

と表現できる. すると S 行列の離散的な部分は,

$$\mathcal{S}_{N'N}(E) = \sum_{N''} \left[\delta_{N'N''} - i \frac{\Gamma}{E - E_R + i\Gamma/2} \sum_r u^{(r)}_{N'}\, u^{(r)*}_{N''} \right] \mathcal{S}_{0N''N} \tag{3.8.11}$$

となる. r に関する和の各項は全てが等しい E_R と Γ をもつ異なる共鳴状態から生じていると考えることができる.

これは反応率や断面積とどのように関係しているだろうか? 簡単のためにここでは非共鳴背景散乱を無視して $\mathcal{S}_{0\,N'N}$ を $\delta_{N'N}$ に等しくおく. 少し後で, より一般的な場合に戻ることにする. すると前節で説明した 2 体の離散的な重心系での状態について (3.8.11) は,

$$\mathcal{S}_{j'\sigma'\ell's'n',\,j\sigma\ell sn}(E) = \delta_{j'j}\delta_{\sigma'\sigma}\delta_{\ell'\ell}\delta_{s's}\delta_{n'n} \\ -i\frac{\Gamma}{E-E_R+i\Gamma/2}\sum_r u^{(r)}_{j'\sigma'\ell's'n'}\,u^{(r)*}_{j\sigma\ell sn} \tag{3.8.12}$$

となる. あらゆる場合に添字 r は共鳴状態の全角運動量の z 成分を表す指標 σ_R を含み, σ_R は $2j_R+1$ 個の値をとる. もしそれ以外の縮退がなければ r はちょうど σ_R の値を表し,

$$u^{(\sigma_R)}_{j\sigma\ell sn} = \delta_{j_R,j}\delta_{\sigma_R,\sigma}u_{\ell sn} \tag{3.8.13}$$

だ. ここで $u_{\ell sn}$ は (ウィグナー・エッカルトの定理により) σ に依らない複素振幅の組だ. (3.8.12) より (3.7.7) で定義された振幅 S^j は,

$$S^j_{\ell's'n',\ell sn}(E) = \delta_{\ell',\ell}\delta_{s's}\delta_{n'n} - i\delta_{j,j_R}\frac{\Gamma}{E-E_R+i\Gamma/2}u_{\ell's'n'}\,u^*_{\ell sn} \tag{3.8.14}$$

で与えられる. また, (3.8.10) はここでは,

$$\sum_{\ell sn}|u_{\ell sn}|^2 \,+\, \cdots = 1 \tag{3.8.15}$$

となり, 点々は 3 個以上の粒子を含む任意の状態からの正の寄与を表す. 後で見るように, 量 $|u_{\ell sn}|^2$ は共鳴状態が様々な遷移可能な 2 体状態へ崩壊する分岐比と解釈できる.

(3.7.12) より今度はチャンネル n の全ての反応の全断面積が,

$$\sigma_{\rm total}(n;E) = \frac{\pi(2j_R+1)}{k^2(2s_1+1)(2s_2+1)}\frac{\Gamma\Gamma_n}{(E-E_R)^2+\Gamma^2/4} \tag{3.8.16}$$

となる. ここで,

$$\Gamma_n \equiv \Gamma \sum_{\ell s} |u_{\ell s n}|^2 \tag{3.8.17}$$

だ. これは有名なブライト・ウィグナーの単一準位公式[27]の一つの形だ. これらの結果は, 始状態の 2 体チャンネル n から終状態の 2 体チャンネル n' への共鳴散乱の断面積を計算するのにも使える. (3.8.14) を (3.7.10) に用いると,

$$\sigma(n \to n'; E) = \frac{\pi(2j_R+1)}{k^2(2s_1+1)(2s_2+1)} \frac{\Gamma_n \Gamma_{n'}}{(E-E_R)^2+\Gamma^2/4} \tag{3.8.18}$$

が得られる. これは, 共鳴状態が終状態の 2 体チャンネル n' の任意の一つに崩壊する確率が $\Gamma_{n'}$ に比例することを示している. (3.8.15) によれば, Γ_n の和は (3 個以上の粒子から成る終状態の寄与を含めて) 全崩壊率 Γ にちょうど等しい. よって, Γ_n はちょうどチャンネル n への共鳴状態の崩壊率だと結論できる.

(3.8.16) と (3.8.18) において, エネルギー E_R に幅 (半値全幅 (full width at half maximum)) Γ の特徴的な共鳴の鋭い山が見える. (個々の Γ_n はしばしば部分幅 (partial width) と呼ばれる.) $\Gamma_n \leq \Gamma$ なので, 共鳴のピークでの全断面積はだいたい 1 波長の 2 乗 $(2\pi/k)^2$ で抑えられている. 一つの共鳴での断面積がだいたい波長の 2 乗で抑えられているというこの法則は, 例えば音波が海水中の泡と, あるいは重力波が重力波アンテナと共鳴的に相互作用する場合のように古典物理でも普遍的に適用できるが, そこではここでユニタリー性が果たした役割をエネルギー保存則が果たす. (後者の場合, 実験室レベルの質量の振動が重力放射によってエネルギーを失う分岐比はわずかで, 共鳴のピークでの断面積でさえ 1 波長の 2 乗よりはるかに小さい.[28])

ついでながら, 共鳴は検出されるが, エネルギーの測定はその幅を分解するほど十分正確ではないということがしばしば起こる. この場合, 実験的に測定されるのは断面積の共鳴の山全体にわたる積分だ.

全断面積 (3.8.18) の場合, これは,

$$\int \sigma_{\text{total}}(n; E)dE = \frac{2\pi^2(2j_R+1)\Gamma_n}{k_R^2(2s_1+1)(2s_2+1)} \tag{3.8.19}$$

だ. そのような実験により明らかになるのは, 全断面積または分岐比ではなく, 共鳴状態が始状態の粒子に崩壊する部分幅のみだ.

この形式はまた, 与えられたスピンの z 成分を持つ共鳴状態が, ある対称群で関係づけられた多重項を作るときにも適用できる. 例えば, アイソスピン対称性が保存する程度に, 全アイソスピン T_R の共鳴の場合, 共鳴状態を指定する指標 r は角運動量の z 成分 σ_R だけでなく, 値 $-T_R, -T_R+1, \cdots T_R$ をとるアイソスピンの第 3 成分 t_R も含む. この場合全断面積と部分断面積に関する上の結果は変わらない. なぜなら, 各 2 体チャンネル n は 2 粒子のアイソスピンの z 成分の特定の値 t_1 と t_2 を持ち, よって t_R が一つの値 t_1+t_2 を持つ共鳴状態とのみ結合できる. その部分幅 Γ_n は因子 $C_{T_1,T_2}(T_R, t_R; t_1, t_2)^2$ を通じてのみ t_1 と t_2 に依存するからだ.

共鳴状態の存在はその近傍における位相のずれの特徴的な振舞いに表れる. 一般公式 (3.8.11) に戻って (ただし $\mathcal{S}_0 = 1$ のままで考えるが), (3.8.10) から個々の共鳴状態 r には固有値,

$$\exp(2i\delta^{(r)}(E)) = 1 - i\frac{\Gamma}{E - E_R + i\Gamma/2},$$

言い換えれば,

$$\tan\delta^{(r)}(E) = -\frac{\Gamma/2}{E - E_R} \tag{3.8.20}$$

を持つ $\mathcal{S}_{N'N}(E)$ の固有ベクトル $u_N^{(r)}$ があることがわかる. 共鳴エネルギーを中心にして Γ 程度のエネルギー範囲で「固有位相」 $\delta^{(r)}(E)$ は共鳴より下での $\nu\pi$ (ν は正または負の整数) という値から共鳴より上での $(\nu+1)\pi$ という値に飛び移る. しかし, この結果を用いて反応率について何か言うためには, 固有ベクトル $u_N^{(r)}$ を知る必要があり,

それは一般に任意個の粒子の様々な運動量, スピン, 粒子の種類の成分を持つ.

これらの結果は, 特定のチャンネル N にある粒子が他のどのチャンネルにも遷移することが (普通は保存則により) 禁止されているときに, はるかに有益だ. こう仮定すれば, 一般的な結果 (3.8.11) に非共鳴背景散乱行列 $\mathcal{S}_0$ の効果を含めることは難しくない. $\mathcal{S}_{N'N}$ がある特定の N と全ての $N' \neq N$ についてゼロになるには, 同じことが $\mathcal{S}_{0N'N}$ について成り立ち, さらに $u_{N'}^{(r)}$ が $u_N^{(r)} \neq 0$ なる任意の r についてゼロになる必要がある. すると, ユニタリー性の要求 (3.8.5) よりこの N について,

$$\mathcal{S}_{0N'N} = \exp(2i\delta_{0N})\delta_{N'N}$$

が成り立つことが要求され, また (3.8.10) より,

$$u_N^{(r)*}u_N^{(s)} = \delta_{rs}$$

が成り立つことが要求され, (3.8.11) には $u_N^{(r)} \neq 0$ なる項 r は一つしか残らない. この場合 (3.8.11) より,

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{N'N}(E) &= \delta_{N'N}\left[1 - \frac{i\Gamma}{E - E_R + i\Gamma/2}\right]\exp(2i\delta_{0N}) \\ &\equiv \delta_{N'N}\exp(2i\delta_N(E))\end{aligned}$$

が得られ, 全位相のずれは,

$$\delta_N(E) = \delta_{0N} - \arctan\left(\frac{\Gamma/2}{E - E_R}\right) \tag{3.8.21}$$

となる. 共鳴エネルギー E_R 近傍の Γ 程度のエネルギー範囲で, 位相のずれ $\delta_N(E)$ は共鳴より下での値 δ_{0N} から上での値 $\delta_{0N} + \pi$ に飛び移る. 例えば, 前節で見たように, これらの仮定はパイオン–パイオン散乱やパイオン–核子散乱のような余分なパイオンを生成する閾値以下のエネルギーでの様々な 2 体反応において満たされている. ここで,

N は全アイソスピン T とその第 3 成分 t ばかりでなく, 全角運動量 j, 軌道角運動量 ℓ (パイオン–パイオン散乱では $j=\ell$), 全角運動量の z 成分 σ を含む. ウィグナー・エッカルトの定理より, 位相のずれは j, ℓ, T にのみ依存することが許されるが, t や σ には依存しない. これらのチャンネルには有名な共鳴状態がある. すなわち, パイオン–パイオン散乱では ρ と呼ばれる $j=\ell=1$, $T=1$, $\Gamma = 150$ MeV の共鳴状態が 770 MeV に存在し, パイオン–核子散乱では Δ と呼ばれる $j=\frac{3}{2}$, $\ell=1$, $T=\frac{3}{2}$, $\Gamma = 110 \sim 120$ MeV の共鳴が 1232 MeV に存在する.

(3.7.12) か (3.7.18) を見ると, 全断面積は共鳴の位相のずれが $\pi/2$ (あるいは $\pi/2$ の奇数倍) を通過するとき最大値に達することがわかる. 非共鳴的な位相のずれは典型的にはかなり小さいので, すでに見たように, E_R に近いエネルギーで位相のずれ δ_ℓ が $\pi/2$ を通過するときにσ_{total} は鋭い山を示す. しかし, 非共鳴背景の位相のずれ δ_{0N} が $\pi/2$ に近いことがときどき起こるが, その場合に位相のずれが E_R の近くで π を通過するときに, 共鳴状態と非共鳴背景振幅との負の干渉により断面積は鋭いくぼみ (dip) を示す. そのようなくぼみはラムザウアー (Ramsauer) とタウンゼント (Townsend)[29]により 1922 年に, 希ガス原子による電子散乱ではじめて観測された.

問題

1. 分離可能な相互作用を持つ理論を考える. すなわち,

$$(\Phi_\beta, V\Phi_\alpha) = g\, u_\beta\, u_\alpha^* \,.$$

ここで, g は実の結合定数, u_α は,

$$\sum_\alpha |u_\alpha|^2 = 1$$

を満たす複素量の組だ. このとき, リップマン・シュウィンガー

方程式 (3.1.16) を用いて,「in」状態と「out」状態および S 行列の陽な解を求めよ.

2. スピン 1 の共鳴状態が全エネルギー 150 GeV の e^+– e^- 散乱で発見され, その (重心系で始状態のスピンを平均し終状態のスピンの和をとった) 断面積が弾性 e^+– e^- 散乱について共鳴のピークで 10^{-34} cm^2 に等しいとする. 共鳴状態 R の, モード $R \to e^- + e^+$ による崩壊の分岐比はいくらか. 共鳴のピークにおける e^+– e^- 散乱の全断面積はいくらか. (ただし両問とも非共鳴背景散乱は無視せよ.)

3. 2 粒子のうちの一方が始状態で静止している**実験室系** (laboratory frame) での 2 体散乱の微分断面積を, 力学変数と行列要素 $M_{\beta\alpha}$ で表せ. (この章で導いた重心系での微分断面積の結果を用いずに, 直接結果を導け.)

4. 摂動展開 (3.5.8) を旧式の摂動論 (3.5.3) から直接導け.

5. 「定常波」状態 ${\Psi_\alpha}^0$ をリップマン・シュウィンガー方程式の修正版,

$$ {\Psi_\alpha}^0 = \Phi_\alpha + \frac{\mathcal{P}}{E_\alpha - H_0} V {\Psi_\alpha}^0 $$

で定義できる. 行列 $K_{\beta\alpha} \equiv \pi\delta(E_\beta - E_\alpha)(\Phi_\beta, V{\Psi_\alpha}^0)$ はエルミートであることを示せ. S 行列を K 行列で表す方法を示せ.

6. π^+– 陽子と π^-– 陽子の弾性散乱の微分断面積を, 一定の全角運動量, パリティ, アイソスピンを持つ状態の位相のずれで表せ.

7. (3.7.5) で定義された状態 $\Phi_{E\mathbf{p}j\sigma s n}$ は正しい内積 (3.7.6) を持つように規格化されていることを示せ.

参考文献

1. より詳しくは, M. L. Goldberger and K. M. Watson, *Collision Theory* (John Wiley & Sons, New York, 1964); R. G. Newton, *Scattering Theory of Waves and Particles*, 第 2 版 (Springer-Verlag, New York, 1982) を見よ.

1*a*. B. Lippmann and J. Schwinger, *Phys. Rev.* **79**, 469 (1950).

2. J. A. Wheeler, *Phys. Rev.* **52**, 1107 (1937); W. Heisenberg, *Z. Phys.* **120**, 513, 673 (1943).

3. M. Born, *Z. Phys.*. **37**, 863 (1926); **38**, 803 (1926).

4. C. Møller, *Kgl. Danske Videnskab. Mat. Fys. Medd.* **23**, No. 1 (1945); **22**, No. 19 (1946).

5. G. D. Rochester and C. C. Butler, *Nature* **160**, 855 (1947). 歴史的な概説については, G. D. Rochester, *Pions to Quarks – Particle Physics in the 1950s*, L. M. Brown, M. Dresden, and L. Hoddeson 編 (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1989) を見よ.

6. G. Breit, E. U. Condon, and R. S. Present, *Phys. Rev.* **50**, 825 (1036); B. Cassen and E. U. Condon, *Phys. Rev.* **50**, 846 (1936); G. Breit and E. Feenberg, *Phys. Rev.* **50**, 850 (1936).

7. M. A. Tuve, N. Heydenberg, and L. R. Hafstad, *Phys. Rev.* **50**, 806 (1936).

8. M. Gell-Mann, Cal. Tech. Synchotron Laboratory Report CTSL-20 (1961); *Phys. Rev.* **125**, 1067 (1962); Y. Ne'eman *Nucl. Phys.* **26**, 222 (1961).

9. 例えば A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton, 1957) 3 章 (そこでは $C_{j_1 j_2}(jm; m_1 m_2)$ は $(j_1\, j_2\, j\, m | j_1\, m_1\, j_2\, m_2)$ と表記されている); M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum* (John Wiley & Sons, New York, 1957) 3 章 (ローズ著「角運動量の基礎理論」山内恭彦, 森田正人訳, みすず書房) (そこでは $C_{j_1 j_2}(jm; m_1 m_2)$ は $C(j_1\, j_2\, j\,;\, m_1\, m_2\, m)$ と表記されている).

10. G. Feinberg and S. Weinberg, *Nuovo Cimento* Serie X, **14**, 571 (1959).

11. W. Chinowsky and J. Steinberger, *Phys. Rev.* **95**, 1561 (1954); B. Ferretti, *Report of an International Conference on Fundamental Particles and Low Temperatures, Cambridge, 1946* (The Physical Society, London, 1947) も見よ.

12. T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **104**, 254 (1956).

13. C. S. Wu *et al.*, *Phys. Rev.* **105**, 1413 (1957).

14. R. Garwin, L. Lederman, and M. Weinrich, *Phys. Rev.* **105**, 1415 (1957); J. I. Friedman and V. L. Telegdi, *Phys. Rev.* **105**, 1681 (1957).

15. K. M. Watson, *Phys. Rev.* **88**, 1163 (1952).

16. M. Gell-Mann and A. Pais, *Phys. Rev.* **97**, 1387 (1955); A. Pais and O. Piccioni, *Phys. Rev.* **100**, 1487 (1955) も見よ.

17. J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch, and R. Turlay, *Phys. Rev. Letters* **13**, 138 (1964).

18. K. R. Schubert *et al.*, *Phys. Lett.* **31B**, 662 (1970). この文献は CPT 不変性を仮定せずに中性K中間子を解析し, 振幅の CPT を保存し CP と T を破る部分はゼロと 5 標準偏差だけ異なる実部と虚部の両方を持つが, T を保存し CPT を破る部分はゼロから 1 標準偏差以内であることを見付けた.

19. R. H. Dalitz, *Phil. Mag.* **44**, 1068 (1953); E. Fabri, *Nuovo Cimento* **11**, 479 (1954) も見よ.

20. F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **75**, 486, 1736 (1949).

21. 例えば L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, 第 3 版 (McGraw-Hill, New York, 1949) (シッフ著「新版 量子力学」井上健訳, 吉岡書店) 19 節を見よ.

22. これは古典電磁理論で最初に証明された. 例えば H. A. Kramers, *Atti Congr. Intern. Fisici, Como, 1927*を見よ; H. A. Kramers, *Collected Scientific Papers* (North-Holland, Amsterdam, 1956) に再録されている. 量子力学における証明は E. Feenberg, *Phys. Rev.* **40**, 40 (1932); N. Bohr, R. E. Peierls, and G. Placzek, *Nature* **144**, 200 (1939) を見よ.

23. この議論の一般化は 1960 年代末に C. N. Yang と C. P. Yang の未刊行の論文で与えられた. A. Aharony, *Modern Developments in Thermodynamics* (Wiley, New York, 1973) pp. 95–114 とその中の参考文献も見よ.

24. 例えば A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, Princeton, 1957) 2 章; M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum* (John Wiley & Sons, New York, 1957) 付録 III (ローズ著「角運動量の基礎

理論」山内恭彦, 森田正人訳, みすず書房); L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics — Non Relativistic Theory*, 第3版 (Pergamon Press, Oxford, 1977) 28節 (ランダウ・リフシッツ著「量子力学–非相対論的理論–」好村滋洋・井上健男・佐々木健訳, 東京図書) を見よ.

25. E. P. Wigner, *Gruppentheorie* (Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1931); C. Eckart, *Rev. Mod. Phys.* **2**, 305 (1930).

26. M. Froissart, *Phys. Rev.* **123**, 1053 (1961).

27. G. Breit and E. P. Wigner, *Phys. Rev.* **49**, 519 (1936).

28. 例えば S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (Wiley, New York, 1972) 10.7節を見よ.

29. R. Kollath, *Phys. Zeit.* **31**, 985 (1931).

第4章

クラスター分解原理

これまで, ハミルトニアン演算子 H の構造の詳細についてはあまり言及しなかった. この演算子は任意個の粒子を含む状態の間の全ての行列要素を与えれば定義される. また, その代りに, ここで示すように, そのような演算子は必ず1粒子を生成する演算子と消滅させる演算子の関数として表せる. 1章で見たように, そのような生成・消滅演算子は量子力学の初期に電磁場や他の場の正準量子化で得られた. そして, このような形式は, 1930年代初頭のフェルミのベータ崩壊理論に初めて使われて以来, 質量のある粒子や光子が作られたり消されたりする理論に自然な枠組みを提供してきた.

しかし, ハミルトニアンを生成・消滅演算子で構成するのには, より深い理由がある. これは電磁理論のような既存の場の理論を量子化する必要性を越えた問題であり, また, 実際に粒子が作られたり消されたりするかどうかには全く関係が無い. この理論形式の大きな利点は, ハミルトニアンを生成・消滅演算子の積に特異でない係数をかけて足したものとすれば, S 行列が決定的な物理的要請であるクラスター分解原理を自動的に満たすことにある.[1] この原理は, 遠く離れた実験では相関の無い結果が得られることを意味する. 実際, この理由のため

に, 生成・消滅演算子形式は粒子数が通常変化しない非相対論的量子統計でも使われる. 相対論的量子論では, クラスター分解原理が, 場の理論を不可避なものにする上で, 重要な役割を演じている. 相対論的に不変な理論を局所場の理論以外のやり方で作る試みは多くあった. 実際に, 2 粒子散乱については場の理論ではないがローレンツ不変な S 行列を与える理論を作ることができる.[2] しかし, そのような理論は常に 3 粒子以上の部分で問題が生じる. すなわち, 3 粒子の S 行列がローレンツ不変でないか, またはクラスター分解原理を破るという困難がある.

この章では, 最初に任意の個数のボソンとフェルミオンを含む状態の基底を論じる. 次に生成・消滅演算子を定義し, 最後に, それらを使って, クラスター分解原理を満たす S 行列を導くハミルトニアンがいかに作られるかをみる.

4.1　ボソンとフェルミオン

物理的ヒルベルト空間は, 0, 1, 2, ⋯ 個の自由粒子を含んだ状態で張られる. これらは, 自由粒子でもいいが, 「in」状態でも「out」状態でもよい. 明確にするために, ここでは自由粒子状態 $\Phi_{\mathbf{p}_1\,\sigma_1\,n_1,\mathbf{p}_2\,\sigma_2\,n_2,\cdots}$ を扱うが, ここでの結果は「in」状態にも「out」状態にも同様に当てはまる. 通常どおり, σ はスピンの z 成分 (または, 質量ゼロの粒子についてはヘリシティ), そして n は粒子の種類の添字とする.

ここで, 3 章で飛ばしたこれらの状態の対称性を調べておこう. 我々が知る限り, すべての粒子はボソンかフェルミオンだ. その差は, 二つの同一のボソンの交換では状態は変化しないが, 二つの同一のフェルミオンの交換では符号が変わることにある. すなわち,

$$\Phi_{\cdots\mathbf{p}\,\sigma\,n\,\cdots\,\mathbf{p}'\,\sigma'\,n\,\cdots} = \pm\,\Phi_{\cdots\mathbf{p}'\,\sigma'\,n\,\cdots\,\mathbf{p}\,\sigma\,n\,\cdots} \tag{4.1.1}$$

で, n がボソンかフェルミオンかによって, それぞれ上か下かの符号が選ばれる. 点々はこの状態にある他の粒子を表わす. (これは「波動関数」, つまり物理的に許される状態ベクトルのこれらの多粒子状態基底での係数に対する条件としても表わせる.) これら二つの場合はしばしばボーズ「統計」およびフェルミ「統計」と呼ばれる. 次章で, ボーズ統計とフェルミ統計は, それぞれ整数と半整数のスピンの粒子にのみ許されることをみるが, この章ではこの情報は必要ない. この章では厳密ではない議論ですべての粒子はボソンかフェルミオンでなければならないことを示し, 多ボソンと多フェルミオンの状態の規格化条件を設定する.

まず, 二つの粒子がスピンと運動量 $\mathbf{p},\sigma$ と $\mathbf{p}',\sigma'$ を持ち, 同じ種類 n に属するとすると, 状態ベクトル $\Phi_{\cdots\mathbf{p}\,\sigma\,n\,\cdots\,\mathbf{p}'\,\sigma'\,n\,\cdots}$ と $\Phi_{\cdots\mathbf{p}'\,\sigma'\,n\,\cdots\,\mathbf{p}\,\sigma\,n\,\cdots}$ は同じ物理的状態を表わすことに注目する. もしそうでないなら, 粒子は状態ベクトルの内で添字の順序で区別されることになり, 最初にリストされた粒子は 2 番目の粒子とは同一でなくなってしまう. 二つの状態は物理的に区別できないから, 同じ射線表現に属する. したがって, α_n を絶対値 1 の複素数として,

$$\Phi_{\cdots\mathbf{p}\,\sigma\,n\,\cdots\,\mathbf{p}'\,\sigma'\,n\,\cdots} = \alpha_n\,\Phi_{\cdots\mathbf{p}'\,\sigma'\,n\,\cdots\,\mathbf{p}\,\sigma\,n\,\cdots} \tag{4.1.2}$$

となる. これは同一粒子の定義の一部ともみなせる.

一番重要なのは, 位相因子 α_n が何に依存できるかだ. もしそれが粒子の種類の指標 n にのみ依存するなら, 問題は解けたも同然だ. (4.1.2) で 2 粒子を再び交換して, 以下を得る.

$$\Phi_{\cdots\mathbf{p}\,\sigma\,n\,\cdots\,\mathbf{p}'\,\sigma'\,n\,\cdots} = \alpha_n^2\,\Phi_{\cdots\mathbf{p}\,\sigma\,n\,\cdots\,\mathbf{p}'\,\sigma'\,n\,\cdots}.$$

したがって, $\alpha_n^2 = 1$ となり, (4.1.1) の二つの場合のみが許される.

α_n は他に何に依存できるだろうか? それはこの状態にある他の粒子 ((4.1.1.) と (4.1.2) では点々で示されている) の数と種類に依存す

るかも知れない．しかし，こうするとこの地球上での粒子の交換のもとでの状態ベクトルの対称性が，宇宙のどこかの粒子の存在によるという困ったことになってしまう．これは，この章で後程論じるクラスター分解原理によって排除されるものだ．位相 α_n は交換される二つの粒子のスピンに依存することはできない．これは，それらのスピンに依存する位相因子は回転群の表現になっていなければならないが，3 次元回転群には自明でない 1 次元表現，すなわち位相因子だけの表現は存在しないからだ．位相 α_n が交換される二つの粒子の運動量に依存することは考えられないでもない．しかし，ローレンツ不変性のため α_n はスカラー $p_1^\mu p_{2\mu}$ のみにしか依存できない．これは粒子 1 と 2 の交換で対称なので，このような依存性があっても $\alpha_n^2 = 1$ という結論は変わらない．

上の議論で論理的に欠けているのは，(我々の記法では見えなくなっているが，) 状態 $\Phi_{\mathbf{p}_1\,\sigma_1\,n,\mathbf{p}_2\,\sigma_2\,n,\cdots}$ が粒子の運動量を $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdots$ に持ってくる際の運動量空間での経路に依存する位相因子を持っているかもしれないということだ．この場合には，二つの粒子を 2 度交換すると，状態が位相因子だけ変わり，$\alpha_n^2 \neq 1$ となることができる．9.7 節で，これは 2 次元空間では起こり得るが，3 次元かそれ以上の空間次元では起こらないことを示す．

異なる種類に属する粒子の交換についてはどうだろうか？ この質問は，状態ベクトルをすべての光子の運動量とヘリシティを最初に，次にすべての電子の運動量とスピンの z 成分，というように，素粒子の分類表にあるすべての素粒子について順に辿っていくことに最初からしておけば，避けることもできる．そうする代わりに，粒子種類の添字がどんな順序に現れてもよいとし，任意の順序の粒子の添字の状態がある標準的な順序に添字を並べた状態に位相因子をかけたものと等しいと定義することもできる．その場合の位相因子は異なる種類の粒子の交換に対してどのように依存してもよい．アイソスピン不変性の

ように異なる種類の粒子を関係付ける対称性を扱うためには, (4.1.1) を一般化して, 粒子が同じ種類に属するかどうかとは無関係に, 必ず, 任意のボソン同志の交換あるいは任意のボソンと任意のフェルミオンの交換のもとで状態ベクトルは対称で, 任意のフェルミオン同志の交換のもとで反対称ととるのが便利だ.*

これらの状態の規格化は, この対称性条件に矛盾しないように決めなければならない. 書き方を簡略化して, 添字 q で 1 粒子の全ての量子数, つまり, その運動量 $\mathbf{p}$, スピンの z 成分 (もしくは質量ゼロの粒子では, ヘリシティ) そして, 種類 n を表わすことにする. このようにすると, N 粒子状態は $\Phi_{q_1 \ldots q_N}$ (真空 Φ_0 では $N = 0$) と書ける. $N = 0$ と $N = 1$ では対称性の問題は生じない. ここでは,

$$(\Phi_0,\ \Phi_0) = 1 \tag{4.1.3}$$

と

$$(\Phi_{q'},\ \Phi_q) = \delta(q' - q) \tag{4.1.4}$$

だ. ここで, $\delta(q' - q)$ は粒子の量子数についての全てのデルタ関数とクロネッカーのデルタの積だ.

$$\delta(q' - q) \equiv \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\, \delta_{\sigma'\sigma}\delta_{n'n}. \tag{4.1.5}$$

一方, $N = 2$ では, $\Phi_{q'_1 q'_2}$ と $\Phi_{q'_2 q'_1}$ の状態は物理的に同じであり,

$$\left(\Phi_{q'_1 q'_2}\ ,\ \Phi_{q_1 q_2}\right) = \delta(q'_1 - q_1)\, \delta(q'_2 - q_2) \pm\ \delta(q'_2 - q_1)\, \delta(q'_1 - q_2) \tag{4.1.6}$$

としなければならない. 符号 $\pm$ はもし両方の粒子ともにフェルミオンなら $-$ であり, そうでなければ $+$ をとる. これは明らかに, 上で述

*実際, 同じ理由で, 同じ種類に属し, 異なるヘリシティかスピンの z 成分を持つ粒子の交換のもとでの対称性あるいは反対称性も純粋に定義の問題だ. なぜなら, 最初から, ヘリシティ $+1$ の光子の運動量を挙げ, 次にヘリシティ -1 の光子の運動量, そして, スピンの z 成分が$+1/2$ と並べていくことができたからだ. 同一だが異なるヘリシティかスピンの z 成分を持つボソンまたはフェルミオンの交換のもとで, 状態ベクトルが対称または反対称にとるのは, 回転対称性の利用を容易にするための慣習だ.

べた状態の対称性と矛盾しない. より一般的には,

$$\left(\Phi_{q'_1 q'_2 \cdots q'_M}, \Phi_{q_1 q_2 \cdots q_N}\right) = \delta_{NM} \sum_{\mathcal{P}} \delta_{\mathcal{P}} \prod_i \delta(q_i - q'_{\mathcal{P}i}) \tag{4.1.7}$$

となる. この和は, 整数, 1, 2,$\cdots$, N の全ての置換 $\mathcal{P}$ についてとる. (たとえば, (4.1.6) の最初の項では $\mathcal{P}$ は恒等置換で, $\mathcal{P}1 = 1$, $\mathcal{P}2 = 2$, 第 2 項では $\mathcal{P}1 = 2$, $\mathcal{P}2 = 1$ となる.) また, $\delta_{\mathcal{P}}$ は符号因子で, もし $\mathcal{P}$ がフェルミオンの奇置換 (フェルミオンの奇数個の交換) であれば-1 であり, その他の場合は $+1$ だ. (4.1.7) が q_i の交換についても, また, q'_j の交換についても望むべき対称性または反対称性を持っていることは簡単にわかる.

4.2　生成・消滅演算子

生成・消滅演算子は前節で調べた規格化された多粒子状態にどのような効果を及ぼすかで定義できる. **生成演算子** (creation operator) $a^\dagger(q)$ (または, より詳細に書くと, $a^\dagger(\mathbf{p}, \sigma, n)$) は, 以下のように状態の粒子のリストの先頭に量子数 q の粒子を加える演算子と定義する.

$$a^\dagger(q)\Phi_{q_1 q_2 \cdots q_N} \equiv \Phi_{q q_1 q_2 \cdots q_N} \,. \tag{4.2.1}$$

特に N 粒子状態は真空に N個の生成演算子を施して得られる.

$$a^\dagger(q_1)a^\dagger(q_2)\cdots a^\dagger(q_N)\Phi_0 = \Phi_{q_1 \cdots q_N} \,. \tag{4.2.2}$$

この演算子は $a^\dagger(q)$ と書かれるのが普通だが, その共役演算子 $a(q)$ は, (4.1.7) から計算される. 今から証明するように $a(q)$ はそれが作用する状態から粒子を一つ取り除くので, **消滅演算子** (annihilation operator) と呼ばれる. 特に, 粒子 $q\, q_1 \cdots q_N$ が全てボソンかフェルミオンのとき,

$$a(q)\Phi_{q_1 q_2 \cdots q_N} = \sum_{r=1}^{N} (\pm)^{r+1} \delta(q - q_r) \Phi_{q_1 \cdots q_{r-1} q_{r+1} \cdots q_N} \tag{4.2.3}$$

となる. ここで, 符号は, ボソンの時に +1, フェルミオンの時に−1 だ. (証明は以下のようにする. $a(q)\Phi_{q_1 q_2 \cdots q_N}$ と任意の $\Phi_{q'_1 \cdots q'_M}$ という状態のスカラー積を計算する. (4.2.1) を使って, これは,

$$\left(\Phi_{q'_1 \cdots q'_M},\ a(q)\Phi_{q_1 \cdots q_N}\right) \equiv \left(a^\dagger(q)\Phi_{q'_1 \cdots q'_M},\ \Phi_{q_1 \cdots q_N}\right) = \left(\Phi_{q q'_1 \cdots q'_M},\ \Phi_{q_1 \cdots q_N}\right)$$

となる. ここで (4.1.7) を使う. $1, 2, \cdots, N$ の置換 $\mathcal{P}$ についての和は, 置換されて最初にくる整数 r, つまり $\mathcal{P}r = 1$ を満たす rと, 残った整数, $1, \cdots, r-1, r+1, \cdots, N$ の $1, \cdots, N-1$ への写像についての和と書ける. 更に, 符号因子は,

$$\delta_{\mathcal{P}} = (\pm)^{r-1}\delta_{\bar{\mathcal{P}}}$$

となる. ここで, 上の符号はボソン, 下の符号はフェルミオンの場合だ. したがって, (4.1.7) を 2 度使って,

$$\begin{aligned}\left(\Phi_{q'_1 \cdots q'_M},\ a(q)\Phi_{q_1 \cdots q_N}\right) &= \delta_{N,M+1} \\ &\times \sum_{r=1}^{N}\sum_{\bar{\mathcal{P}}}(\pm)^{r-1}\delta_{\bar{\mathcal{P}}}\delta(q - q_r)\prod_{i=1}^{M}\delta(q'_i - q_{\mathcal{P}i}) \\ &= \delta_{N,M+1}\sum_{r=1}^{N}(\pm)^{r-1}\delta(q - q_r)\left(\Phi_{q'_1 \cdots q'_M},\ \Phi_{q_1 \cdots q_{r-1} q_{r+1} \cdots q_N}\right)\end{aligned}$$

を得る. (4.2.3) の両辺は, 任意の状態$\Phi_{q'_1 \cdots q'_M}$について同じ行列要素を持つので等しい. これで証明が完結する.) (4.2.3) の特別な場合として, ボソンとフェルミオンの両方について $a(q)$ が真空を消すことがわかる.

$$a(q)\Phi_0 = 0\,. \tag{4.2.4}$$

ここで定義したように, 生成・消滅演算子は重要な交換関係か反交換関係を満たす. 演算子, $a(q')$ を (4.2.1) に働かせ, (4.2.3) を使うと,

$$a(q')a^\dagger(q)\Phi_{q_1 \cdots q_N} = \delta(q' - q)\Phi_{q_1 \cdots q_N}$$

$$+\sum_{r=1}^{N}(\pm)^{r+2}\delta(q'-q_r)\Phi_{qq_1\cdots q_{r-1}q_{r+1}\cdots q_N}$$

を得る. (第2項の符号は q_r が$\Phi_{qq_1\cdots q_N}$ の第 $(r+1)$ 項目にあるから, $(\pm)^{r+2}$だ.) 一方, 演算子 $a^\dagger(q)$ を (4.2.3) に働かせると,

$$a^\dagger(q)a(q')\Phi_{q_1\cdots q_N}=\sum_{r=1}^{N}(\pm)^{r+1}\delta(q'-q_r)\Phi_{qq_1\cdots q_{r-1}q_{r+1}\cdots q_N}$$

を得る. これから引くか加えるかすると,

$$\left[a(q')a^\dagger(q)\mp a^\dagger(q)a(q')\right]\ \Phi_{q_1\cdots q_N}=\delta(q'-q)\Phi_{q_1\cdots q_N}$$

となる. しかし, これは全ての$\Phi_{q_1\cdots q_N}$ の状態で, (および, 簡単に分かるように, ボソンとフェルミオンの両方を含む状態でも) 成り立つ. したがって, 以下の演算子の関係式が得られる.

$$a(q')a^\dagger(q)\mp a^\dagger(q)a(q')=\delta(q'-q)\ . \tag{4.2.5}$$

これに加えて, (4.2.2) からすぐに,

$$a^\dagger(q')a^\dagger(q)\mp a^\dagger(q)a^\dagger(q')=0 \tag{4.2.6}$$

と,

$$a(q')a(q)\mp a(q)a(q')=0 \tag{4.2.7}$$

が得られる. ここで, いつものように, 上下の符号はそれぞれボソンとフェルミオンに対応している. 前節で述べた記法によれば, 二つの異なった種類の粒子の生成・消滅演算子は少なくとも一方の粒子がボソンならば可換で, 両方の粒子ともフェルミオンならば反可換だ.

上の議論は (多くの教科書でそうであるように) 逆の順序ですることもできた. つまり, ある与えられた場の理論での正準量子化条件から導いた交換・反交換関係 (4.2.5)–(4.2.7) から始めることもできたわけ

だ. その場合, 多粒子状態は (4.2.2) で定義され, そのスカラー積 (4.1.7) は交換・反交換関係から導かれる. 実際, 1 章で述べたように, そのような扱いは, この理論が歴史的に発展してきた過程に非常に近い. しかし, ここでは, 既存の場の理論にしばられることなしに, 場の理論がなぜそうでなければならないかを調べるために歴史的ではないアプローチをとった.

ここで, この章の始めで引用した基本的な定理を証明する. それは, どんな 演算子 $\mathcal{O}$ も生成・消滅演算子の積の和で書くことができる, つまり,

$$\begin{aligned}\mathcal{O} = \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{M=0}^{\infty}\int dq_1'\cdots dq_N' dq_1\cdots dq_M \\ \times a^\dagger(q_1')\cdots a^\dagger(q_N')a(q_M)\cdots a(q_1) \\ \times C_{NM}(q_1'\cdots q_N' q_1\cdots q_M)\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

として, この表現の行列要素がどのような値をもつようにも係数 C_{NM} を選ぶことができるということだ. これは, 数学的帰納法で証明できる. まず最初に, C_{00} を適切に選ぶことにより, $(\Phi_0, \mathcal{O}\Phi_0)$ にどのような値を与えることもできることは自明だ. これは $N > 0$ と $M > 0$ の両方またはどちらかの C_{NM} に依らない. これをみるためには, (4.2.4) を使って, (4.2.8) が真空期待値,

$$(\Phi_0, \mathcal{O}\Phi_0) = C_{00}$$

を与えることをみればよい. さて, 同様のことが, $N < L, M \le K$ か $N \le L, M < K$を満たす N粒子状態と M粒子状態ではさんだ $\mathcal{O}$ の行列要素についても成立するとしよう. つまり, これらの行列要素が, 対応する係数 C_{NM}を適切に選ぶことによりある望まれる値をとるようになっているとする. このとき, それが任意の L 粒子状態と K 粒子状態ではさんだ $\mathcal{O}$ の行列要素についても成立することをみるには,

(4.2.8) を使って, 以下を計算する.

$$\left(\Phi_{q'_1\cdots q'_L}, \mathcal{O}\Phi_{q_1\cdots q_K}\right) = L!K!\,C_{LK}(q'_1\cdots q'_L q_1\cdots q_K)$$
$$+[C_{NM}\text{ を含む項, ただし }N<L, M\le K\text{ か }N\le L, M<K] .$$

$N<L, M\le K$ か $N\le L, M<K$ の C_{NM}にどのような値が与えられていても, 明らかに C_{LK}を選んでこの行列要素にどのような望む値も与えることができる.

もちろん, 演算子を必ずしも (4.2.8) の形で, 全ての生成演算子を消滅演算子の左に書く (これをしばしば, 演算子の「正規」順序積という) 必要はない. しかし, ある演算子が生成・消滅演算子を正規順序以外の順序で含んでいたら, 交換関係か反交換関係を繰り返し使い, (4.2.5) のデルタ関数からでる新たな項を拾いながら, 常に生成演算子を消滅演算子の左に持ってゆくことはできる.

たとえば, 以下の式を満たす任意の加算的演算子 F (運動量とか電荷など) を考えよう.

$$F\Phi_{q_1\cdots q_N} = \left(f(q_1)+\cdots+f(q_N)\right)\Phi_{q_1\cdots q_N} . \tag{4.2.9}$$

このような演算子は $N=M=1$ の項だけを使って, (4.2.8) のように書ける.

$$F = \int dq\, a^\dagger(q)a(q)f(q) . \tag{4.2.10}$$

特に, 自由粒子のハミルトニアンは, 常に,

$$H_0 = \int dq\, a^\dagger(q)a(q)E(q) \tag{4.2.11}$$

と書ける. ここで, $E(q)$ は以下の 1 粒子のエネルギーだ.

$$E(\mathbf{p},\sigma,n) = \sqrt{\mathbf{p}^2+m_n^2} .$$

生成・消滅演算子の種々の対称性に関する変換性を知る必要がある. まず, 非斉次固有順時ローレンツ変換を考える. N粒子状態がローレ

ンツ変換性,

$$U_0(\Lambda,\alpha)\Phi_{\mathbf{p}_1\sigma_1 n_1,\mathbf{p}_2\sigma_2 n_2,\cdots} = e^{-i(\Lambda p_1)\cdot\alpha}\ e^{-i(\Lambda p_2)\cdot\alpha} \cdots\sqrt{\frac{(\Lambda p_1)^0(\Lambda p_2)^0\cdots}{p_1^0 p_2^0\cdots}} \times \sum_{\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2\cdots} D^{(j_1)}_{\bar{\sigma}_1\sigma_1}\Big(W(\Lambda,p_1)\Big) D^{(j_2)}_{\bar{\sigma}_2\sigma_2}\Big(W(\Lambda,p_2)\Big) \cdots\Phi_{\mathbf{p}_{1\Lambda}\bar{\sigma}_1 n_1,\mathbf{p}_{2\Lambda}\bar{\sigma}_2 n_2,\cdots}$$

を持つことを思い出そう. ここで, $\mathbf{p}_\Lambda$ は Λp の 3 元ベクトル部分, $D^{(j)}_{\bar{\sigma}\sigma}(R)$ は 2.5 節で使った 3 次元回転群のスピン j ユニタリー表現, また, $W(\Lambda,p)$ は質量 m の静止粒子を 4 元運動量 p^μ にする基準「ブースト」$L(p)$ を使って,

$$W(\Lambda,p) \equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$$

と定義される. (もちろん, m と jは粒子の種類 n に依る. これは全て $m \neq 0$ の場合のことだ. 質量ゼロの粒子については後の章で扱う.) これらの状態は (4.2.2) のように表せる.

$$\Phi_{\mathbf{p}_1\sigma_1 n_1,\mathbf{p}_2\sigma_2 n_2,\cdots} = a^\dagger(\mathbf{p}_1\sigma_1 n_1)a^\dagger(\mathbf{p}_2\sigma_2 n_2)\cdots\Phi_0\ .$$

ここで, Φ_0 は,

$$U_0(\Lambda,\alpha)\Phi_0 = \Phi_0$$

を満たすローレンツ不変な真空状態だ. 状態 (4.2.2) が正しく変換するには, 生成演算子が以下の変換則を満たすことが必要かつ十分だ.

$$U_0(\Lambda,\alpha)a^\dagger(\mathbf{p}\sigma n)U_0^{-1}(\Lambda,\alpha) = e^{-i(\Lambda p)\cdot\alpha}\sqrt{(\Lambda p)^0/p^0} \times \sum_{\bar{\sigma}} D^{(j)}_{\bar{\sigma}\sigma}\Big(W(\Lambda,p)\Big)a^\dagger(\mathbf{p}_\Lambda\,\bar{\sigma}\,n)\ . \quad (4.2.12)$$

同様に, 自由粒子状態に荷電共役, 空間反転, 時間反転, を引き起こす演算子, C, P, T は* 生成演算子を,

$$\mathsf{C}a^\dagger(\mathbf{p}\,\sigma\,n)\mathsf{C}^{-1} = \xi_n\,a^\dagger(\mathbf{p}\,\sigma\,n^c)\,, \tag{4.2.13}$$

$$\mathsf{P}a^\dagger(\mathbf{p}\,\sigma\,n)\mathsf{P}^{-1} = \eta_n\,a^\dagger(-\mathbf{p}\,\sigma\,n)\,, \tag{4.2.14}$$

$$\mathsf{T}a^\dagger(\mathbf{p}\,\sigma\,n)\mathsf{T}^{-1} = \zeta_n(-1)^{j-\sigma}\,a^\dagger(-\mathbf{p}\ -\sigma\,n) \tag{4.2.15}$$

と変換する.

前節で述べたように, 自由粒子状態に粒子を生成・消滅させる演算子を扱ってはいるが, 全ての形式は「in」状態と「out」状態についてはそれらに働く $a_{\rm in}$ と $a_{\rm out}$ とを同様に定義すれば, 同様に成り立つ. それらの演算子は自由粒子のローレンツ変換演算子 $U_0(\Lambda,\alpha)$ の代りに真のローレンツ変換演算子 $U(\Lambda,\alpha)$ を使って, (4.2.12) と同様のローレンツ変換則を満たす.

4.3 クラスター分解と連結振幅

物理 (実際は, 全ての科学) の基本的原理に, 空間的に充分離れた実験は互いに関係のない結果を与えるということがある. 例えば, シカゴのフェルミ研究所で測定される種々の衝突の確率は, 同時に ジュネーブ郊外にある CERN でどのような実験が行われたかに依存しない. この原理が成立しなければ, ある実験について, 宇宙の全てを知らない限り, 何も予言ができなくなる.

S 行列理論では, クラスター分解定理は, もし, 多粒子過程, $\alpha_1\to\beta_1,\alpha_2\to\beta_2,\cdots,\alpha_{\mathcal N}\to\beta_{\mathcal N}$ が $\mathcal N$ ケ所の非常に離れた実験室で調べられたならば, 全過程の S 行列要素が因子分解されるということを意味

*これらの演算子の添字 0 は省略している. これは, C, P, T 等が保存する事実上全ての場合に, これらの変換を「in」状態と「out」状態に施す演算子は自由粒子状態への作用で定義されるものと同じだからだ. これは, 連続なローレンツ変換については成立しないので, 演算子 $U(\Lambda,a)$ と $U_0(\Lambda,a)$ を区別する必要がある.

する. これは, 全ての $i \neq j$ について, α_i と β_i にある全ての粒子が, α_j と β_j の状態にある全ての粒子と空間的距離が非常に離れているとき, 以下の式が成立することを意味する.*

$$S_{\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{\mathcal{N}},\,\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{\mathcal{N}}} \;\rightarrow\; S_{\beta_1\alpha_1}\,S_{\beta_2\alpha_2}\cdots S_{\beta_{\mathcal{N}}\alpha_{\mathcal{N}}}\,. \qquad (4.3.1)$$

この S 行列の因子分解は, 対応する遷移確率が因子分解できて, それらの実験的結果に互いに相関がないことを保証する.

(4.3.1) を組み合わせ論的な手法を使って, より見やすい形に書くことができる. 以下の式により, S 行列の**連結** (connected) 部分 $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ を定義しよう.**

$$S_{\beta\alpha} = \sum_{\mathrm{PART}} (\pm)\, S^{\mathrm{C}}_{\beta_1\alpha_1} S^{\mathrm{C}}_{\beta_2\alpha_2}\cdots\,. \qquad (4.3.2)$$

ここで, 和は, 状態 α の粒子をクラスター $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ に分ける仕方全てと, 同様に, 状態 β の粒子をクラスター $\beta_1, \beta_2, \cdots$ に分ける仕方全てについてとる. このとき, クラスターの中で単に粒子を入れ替えたものおよび, クラスター同士を入れ替えたものは区別せずにとる. 符号は, $\alpha \rightarrow \alpha_1\alpha_2\cdots$ と $\beta \rightarrow \beta_1\beta_2\cdots$ の並べ替えで, フェルミオンの交換が全部で偶数個なら $+$, 奇数個なら $-$ ととる. **連結**という用語は,

---

*ここでは 3 章の記法に戻っている. つまり, ギリシャ文字 α や β は粒子の集合を意味していて, それぞれの粒子の運動量, スピン, 種類も特定している. また, $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{\mathcal{N}}$ は$\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ と $\alpha_{\mathcal{N}}$ の状態にある全ての粒子を合わせて得られる状態を意味する. $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_{\mathcal{N}}$も同様だ.

**この分解はウーセル (Ursell), メイヤー (Mayer) 他によって古典統計力学で使われた. また, 量子統計力学では, リー (Lee), ヤン (Yang) 他によって使われた.[3] また, ゴールドストーン (Goldstone) とフーゲンホルツ (Hugenholtz) は, これを用いて多粒子状態の基底エネルギーを計算した.[5] これらのどの応用に於いても, グリーン関数, 分配関数, レゾルバント等の連結部分を取り出す目的は, 体積に単純に依存する量を扱うことにある. 本質的に, これは我々の目的でもある. なぜなら, 後にみるように, S 行列の連結部は, 運動量保存のデルタ関数一つのみに比例し, 箱に限れば, デルタ関数はクロネッカーのデルタと体積の積になるという重要な性質を持つからだ. クラスター分解はまた, ノイズの理論[6] でいくつかのランダムな変数の相関関数をキュムラント (cumulant) に分解して, それぞれのランダムな変数に N 個の非常に多くの揺らぎが寄与するときに, それぞれのキュムラントが N に比例するようにするのと形式上同じ手法だ.

摂動論で $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ への様々な寄与を表すダイアグラムの性質から来ている. これは次の節で論じる.

この定義は再帰的なものだ. つまり, それぞれの α と β について, (4.3.2) の右辺の和は $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ に加えて, それぞれの状態 α_j と β_j にある粒子の総数が状態 α と β にある粒子の数より少ないような S^{C} 行列要素の二つかそれ以上の積の和, Σ' からなっている.

$$S_{\beta\alpha} = S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha} + \sum_{\mathrm{PART}}{}' \, (\pm) \, S^{\mathrm{C}}_{\beta_1\alpha_1} S^{\mathrm{C}}_{\beta_2\alpha_2} \cdots .$$

この和の中の S^{C} 行列要素について, 合わせて N 個より少ない粒子を含む状態 β, α についてすでに (4.3.2) が成立しているとしよう. そのとき, 和 Σ' に現れる S 行列要素がどのような値を持とうとも, 常に残りの $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ を選んで, 状態 α, βに合わせて N 個の粒子が含まれているときに (4.3.2) が成立するようにできる.† したがって, (4.3.2) はそれ自身では情報を何も持たず, 単に S^{C} の定義だ.

もし, 状態 αとβ が両方とも 1 粒子からなっていて, その量子数をそれぞれ qと q'と書くと, (4.3.2) の右辺には, $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$自身しかない. したがって, 1 粒子状態については,

$$S^{\mathrm{C}}_{q'q} \equiv S_{q'q} = \delta(q' - q) \tag{4.3.3}$$

となる. (縮退のある場合を除けば, $S_{q'q}$ が $\delta(q' - q)$ に比例することは保存則による. (4.3.3) に比例因子がないのは「in」状態と「out」状態の相対的な位相の選択による.) ここでは, 1 粒子状態は安定であり, このため, 1 粒子状態と真空などの他の状態との間の遷移がないとしている.

---

†ここで, 技術的なことを述べておく. この議論は, (4.3.2) の一つ以上の連結 S 行列要素で状態 α_j と β_j の両方が粒子をまったく含まないという可能性を無視したときにのみ成り立つ. したがって, 連結真空遷移要素 $S^{\mathrm{C}}_{0,0}$ はゼロと定義しなければならない. 時間に依存する外場がなければ, (4.3.2) を真空遷移 S 行列要素 $S_{0,0}$ には使わず, 単に, $S_{0,0} = 1$ とする. 外場があるときの真空遷移振幅については 3・4 巻 (原著 II 巻) で論じる.

2 粒子状態の遷移については, (4.3.2) は以下のようになる.

$$S_{q_1'q_2',q_1q_2} = S^{\mathrm{C}}_{q_1'q_2',q_1q_2} + \delta(q_1'-q_1)\delta(q_2'-q_2) \ \pm\ \delta(q_1'-q_2)\delta(q_2'-q_1)\,. \tag{4.3.4}$$

(ここで (4.3.3) を使った.) 符号±は両方の粒子ともフェルミオンであれば−, そうでなければ+だ. 二つのデルタ関数は合わせて (4.1.6) に等しいから, ここでは, $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$は単に $(S-1)_{\beta\alpha}$に等しい. しかし, 一般的にはより複雑になっている.

3 粒子状態や 4 粒子状態の遷移については, (4.3.2) は,

$$\begin{aligned} &S_{q_1'q_2'q_3',q_1q_2q_3} = S^{\mathrm{C}}_{q_1'q_2'q_3',q_1q_2q_3} \\ &+\delta(q_1'-q_1)S^{\mathrm{C}}_{q_2'q_3',q_2q_3} \pm [\text{置換}] \\ &+\delta(q_1'-q_1)\delta(q_2'-q_2)\delta(q_3'-q_3) \pm [\text{置換}] \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

と,

$$\begin{aligned} &S_{q_1'q_2'q_3'q_4',q_1q_2q_3q_4} = S^{\mathrm{C}}_{q_1'q_2'q_3'q_4',q_1q_2q_3q_4} \\ &+ S^{\mathrm{C}}_{q_1'q_2',q_1q_2}S^{\mathrm{C}}_{q_3'q_4',q_3q_4} \pm [\text{置換}] \\ &+ \delta(q_1'-q_1)S^{\mathrm{C}}_{q_2'q_3'q_4',q_2q_3q_4} \pm [\text{置換}] \\ &+ \delta(q_1'-q_1)\delta(q_2'-q_2)S^{\mathrm{C}}_{q_3'q_4',q_3q_4} \pm [\text{置換}] \\ &+ \delta(q_1'-q_1)\delta(q_2'-q_2)\delta(q_3'-q_3)\delta(q_4'-q_4) \pm [\text{置換}] \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

となる. (全ての置換を考慮に入れると, (4.3.5) には全部で $1+9+6=16$ 個の項, (4.3.6) には全部で $1+18+16+72+24=131$ 個の項がある. また, もし 1 粒子状態が安定だと仮定しなければ, より多くの項がある.) 前に述べたように, $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ の定義は再帰的だ. (4.3.4) を使って, $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ を 2 粒子状態について定義し, そして, その定義を (4.3.5) に使って, 3 粒子状態について $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$を定義する. そして, これらの定義を両方とも (4.3.6) に使って, 4 粒子状態について $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$を定義する, というように続く.

このように S 行列の連結部分を定義するのは, クラスター分解原理は, 状態 β や α にある任意の 1 個以上の粒子が空間的に他の粒子から非常に離れているときに $S^{\rm C}_{\beta\alpha}$ がゼロになるという要請と同等だからだ.‡ これをみるには, 状態 βとα の粒子がクラスター$\beta_1, \beta_2, \cdots$と$\alpha_1, \alpha_2, \cdots,$ にまとめられ, 全ての $j \neq i$ について, 集合$\alpha_i + \beta_i$ の全ての粒子が, 集合$\alpha_j + \beta_j$ の全ての粒子から遠く離れているとする. そうすると, もし, 状態 β' か α' の中のどれかの粒子が他から遠くにあるときに $S^{\rm C}_{\beta'\alpha'}$ がゼロとなるならば, それは, これらの状態のどれかの粒子が異なるクラスターに属するときにもゼロとなる. したがって, (4.3.2) の定義は以下を与える.

$$S_{\beta\alpha} \to \sum{}^{(1)} (\pm) S^{\rm C}_{\beta_{11}\alpha_{11}} S^{\rm C}_{\beta_{12}\alpha_{12}} \cdots \times \sum{}^{(2)} (\pm) S^{\rm C}_{\beta_{21}\alpha_{21}} S^{\rm C}_{\beta_{22}\alpha_{22}} \cdots \times \cdots \, . \tag{4.3.7}$$

ここで, $\Sigma^{(j)}$はクラスターβ_jとα_jを部分クラスター$\beta_{j1}, \beta_{j2}, \cdots$と$\alpha_{j1}, \alpha_{j2}, \cdots$に分ける仕方についての和だ. (4.3.2) をみると, これは, ちょうど望むべき因子分解の性質, (4.3.1) になっている.

例えば, 4 粒子反応, $1234 \to 1'2'3'4'$で, 粒子 $1, 2, 1', 2'$ を $3, 4, 3', 4'$ から非常に離したとする. このとき, もし $S^{\rm C}_{\beta\alpha}$ が状態 βやα のどれかの粒子が他から遠いときにゼロとなるなら, (4.3.6) で生き残る唯一の項は, (より短縮した記法で), 以下のように書ける.

$$\begin{aligned} S_{1'2'3'4',1234} \to\ & S^{\rm C}_{1'2',12} S^{\rm C}_{3'4',34} \\ & + (\delta_{1'1}\delta_{2'2} \pm \delta_{1'2}\delta_{2'1}) S^{\rm C}_{3'4',34} \\ & + (\delta_{3'3}\delta_{4'4} \pm \delta_{3'4}\delta_{4'3}) S^{\rm C}_{1'2',12} \\ & + (\delta_{1'1}\delta_{2'2} \pm \delta_{1'2}\delta_{2'1})(\delta_{3'3}\delta_{4'4} \pm \delta_{3'4}\delta_{4'3}) \, . \end{aligned}$$

---

‡遠いという言葉に意味を与えるには, $S^{\rm C}$をフーリエ変換して, 3 元運動量 $\mathbf{p}$ を全て空間座標の 3 元ベクトルに置き換えなければならない.

(4.3.4) と比べると, これはちょうど必要な因子分解条件 (4.3.1),

$$S_{1'2'3'4',1234} \to S_{1'2',12}S_{3'4',34}$$

になっていることがわかる.

クラスター分解原理を, 状態 β や α の任意の 1 個または複数個の粒子が座標空間で他から遠いときに $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ がゼロになると述べた. これは運動量空間で表しておくと便利だ. 座標空間での行列要素は以下のフーリエ変換として定義される.

$$S^{\mathrm{C}}_{\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_2\cdots,\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\cdots} \equiv \int d^3\mathbf{p}'_1 d^3\mathbf{p}'_2\cdots d^3\mathbf{p}_1 d^3\mathbf{p}_2\cdots\ S^{\mathrm{C}}_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots} \times e^{i\mathbf{p}'_1\cdot\mathbf{x}'_1}\ e^{i\mathbf{p}'_2\cdot\mathbf{x}'_2}\cdots e^{-i\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{x}_1}\ e^{-i\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{x}_2\cdots}\ . \tag{4.3.8}$$

(ここで, 一時的にスピンと種類の添字を省略している. これらは, 単に運動量あるいは座標の添字と同じ所に現れる.) もし, $|S^{\mathrm{C}}_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots}|$ が充分によい振舞いをするなら, (より正確には, ルベーグ積分可能なら) リーマン・ルベーグの定理[7] により, (4.3.8) の積分は空間座標のどのような組み合わせが無限大になろうとゼロとなる. これは, 確かに強すぎる要請だ. 並進不変性から, S 行列の連結部分は S 行列自身と同様に座標ベクトルの差のみに依存できるから, 全ての x_i と x'_j の差を一定に保ったまま同じように変化させても変化しない. これから, S^{C} の要素は運動量表示では, S の要素と同じく, 散乱理論で要請されるエネルギー保存のデルタ関数に加えて, 運動量保存を保証する 3 次元デルタ関数に比例しなければならないことがいえる. (これは, $|S^{\mathrm{C}}_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots}|$ をルベーグ積分不可能にする.) すなわち, 以下のように書ける.

$$\begin{aligned} S^{\mathrm{C}}_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots} = &\ \delta^3(\mathbf{p}'_1+\mathbf{p}'_2+\cdots-\mathbf{p}_1-\mathbf{p}_2-\cdots) \\ &\times \delta(E'_1+E'_2+\cdots-E_1-E_2-\cdots) \\ &\times C_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots}\ . \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

これは問題とはならない．クラスター分解原理は $\mathbf{x}_i$ と $\mathbf{x}'_i$ の差のいくつかが大きくなる時に (4.3.8) がゼロとなることのみを要請する．しかし，もし (4.3.9) の C 自身が 3 元運動量の線形結合のデルタ関数を余分に含んでいると，この原理は満たされない．例えば，C に，ある粒子の部分集合について $\mathbf{p}'_i$ と $-\mathbf{p}_j$ の和がゼロとなるようなデルタ関数が含まれているとしよう．このとき，この部分集合の全ての $\mathbf{x}'_i$ と $\mathbf{x}_j$ が揃って (差を一定に保ちながら) 他の $\mathbf{x}'_k$ と $\mathbf{x}_\ell$ から離れていったときに，(4.3.8) は変化しない．これはクラスター分解原理と反する．したがって，大雑把にいって，クラスター分解原理は単に，S 行列の連結部分は S 行列自身とは異なり，単一の運動量保存のデルタ関数を含むことと同じだ．

これをもう少し正確に述べれば，(4.3.9) の係数関数 $C_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots}$ は運動量について滑らかな関数だということになる．しかし，どの程度滑らかであればいいのだろうか? もし，単に，$C_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\cdots,\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2\cdots}$ が $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}'_2 = \cdots = \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \cdots = 0$ で全ての運動量について解析的だと言えれば，最も簡単だ．この要請は実際，任意の $\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}'$ が他の $\mathbf{x}$ と $\mathbf{x}'$ から非常に遠いときに，$S^{\rm C}_{\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_2\cdots,\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\cdots}$ が指数関数的にゼロとなることを保証する．しかしながら，$S^{\rm C}$ の指数関数的な減少はクラスター分解原理の本質的な部分ではない．実際，解析性の要求は全ての理論で満たされているわけではない．特に，質量のない粒子の理論では，$S^{\rm C}$ は $\mathbf{p}$ と $\mathbf{p}'$ のある値で極を持ち得る．例えば，10 章でみるように，もし質量のない粒子が遷移 $1 \to 3$ で放出され，遷移 $2 \to 4$ で吸収されるなら，$S^{\rm C}_{34,12}$は $1/(p_1 - p_3)^2$に比例する項を持つ．フーリエ変換をすると，そのような極は，$S^{\rm C}_{\mathbf{x}'_1\mathbf{x}'_2\cdots,\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\cdots}$ に座標の負の巾でしか減衰しない項を作る.[1] このような振舞いを排除するほどクラスター分解原理を厳格に求める必要はない．したがって，$S^{\rm C}$についての「滑らかさ」の条件は，$\mathbf{p}$ と $\mathbf{p}'$ のある値で極や分岐点，カットを許すが，デルタ関数のようなひどい特異性は許さないものと理解するべきだ．

4.4 相互作用の構造

さて, どのようなハミルトニアンがクラスター分解原理を満たす S 行列を与えるのだろうか? ここで, 生成・消滅演算子の形式が重要な役割をする. 答は, もし (そして, 私が知る限り, そのときに限り,) ハミルトニアンが (4.2.8) のように,

$$H = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \int d\,q'_1 \cdots d\,q'_N\, d\,q_1 \cdots d\,q_M \times a^\dagger(q'_1) \cdots a^\dagger(q'_N) a(q_M) \cdots a(q_1) \times h_{NM}(q'_1 \cdots q'_N\,,\, q_1 \cdots q_M) \tag{4.4.1}$$

と表されれば, S 行列はクラスター分解原理を満たすという定理にある. ここで, 係数関数 h_{NM}は, 次のように 3 次元運動量保存デルタ関数を一つだけ含むとする.

$$\begin{aligned} &h_{NM}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1 n'_1 \cdots \mathbf{p}'_N\sigma'_N n'_N\,,\, \mathbf{p}_1\sigma_1 n_1 \cdots \mathbf{p}_M\sigma_M n_M) \\ &\quad = \delta^3(\mathbf{p}'_1 + \cdots + \mathbf{p}'_N - \mathbf{p}_1 - \cdots - \mathbf{p}_N) \\ &\qquad \times \tilde{h}_{NM}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1 n'_1 \cdots \mathbf{p}'_N\sigma'_N n'_N\,,\, \mathbf{p}_1\sigma_1 n_1 \cdots \mathbf{p}_M\sigma_M n_M)\,. \end{aligned} \tag{4.4.2}$$

(ここではもう少し陽な記法に戻った.) $\tilde{h}_{NM}$ はデルタ関数を含まない. 4.2 節で述べたようにどのような演算子もこの形に書けるので, (4.4.1) 自身は内容がないことに注意したい. (4.4.1) を, h_{NM} が (4.4.2) の形でだけ単一のデルタ関数を含むという要請と組み合わせて始めて, S 行列がクラスター分解原理を満たすことが保証される.

この定理が摂動論で正しいことは, 6 章でファインマン・ダイアグラムを調べれば明らかになる. この定理を信じる読者は, この章の残りを省略して, 5 章でのこの定理の帰結の考察に移ってもよい. しかし, 以下の証明には教育的なところもあるし, 次の章で述べる場の理論がどのような意味で不可避であるかを明らかにするのに役立つ.

この定理を証明するには，時間に依存した摂動論を使う．(時間に依存した摂動論の一つの利点は，クラスター分解原理の基礎になる組み合わせの議論を非常にわかりやすくすることだ．これは，もし，E が一粒子のエネルギーの和ならば，e^{-iEt}は各エネルギーの関数の積だが，$[E-E_\alpha+i\epsilon]^{-1}$はそうならないことによっている．) S 行列は (3.5.10) により，*

$$S_{\beta\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\int_{-\infty}^{\infty}dt_1\cdots dt_n\Big(\Phi_\beta,T\Big\{V(t_1)\cdots V(t_n)\Big\}\Phi_\alpha\Big) \tag{4.4.3}$$

と表せる．ここで，ハミルトニアンは自由粒子部分 H_0 と相互作用 V とに分かれていて，

$$V(t)\equiv\exp(iH_0t)V\exp(-iH_0t) \tag{4.4.4}$$

であるとしている．さて，状態 Φ_α と Φ_β は (4.2.2) のように，真空 Φ_0 に生成演算子が働いたものとして表せるし，$V(t)$ はそれ自身生成・消滅演算子の積の和だから，(4.4.3) の和の中のそれぞれの項は，生成・消滅演算子の積の真空期待値の和として書ける．(4.2.5) の交換・反交換関係を使って，全ての消滅演算子を順に生成演算子の右に持ってくることができる．(4.2.5) を

$$a(q')a^\dagger(q)=\pm\,a^\dagger(q)a(q')+\delta(q'-q)$$

の形に書けることから，一つの消滅演算子を一つの生成演算子の右に動かすたびに二つの項が生じる．第 1 項で他の生成演算子を消滅演算子を超えて動かすとさらに項が生じる．しかし，(4.2.4) によれば，消滅演算子が一番右に動いてΦ_0に働けばゼロとなるから，最後に残るのはデルタ関数のみだ．このようにして，生成・消滅演算子の積はいく

*ここでは，$n=0$ で (4.4.3) の時間順序積が恒等演算子となって，和の中の $n=0$ の項は単に，$S_{\beta\alpha}$ の$\delta(\beta-\alpha)$ になるという約束を使っている．

つかの項の和となり, それぞれの項は, デルタ関数と交換・反交換関係からくる ± の符号の積となる. これより, (4.4.3) の各項は, デルタ関数と交換・反交換関係からくる ± の積と $V(t)$ からくる因子が全ての時間について積分され, デルタ関数の引数の全ての運動量, スピン, 種類について和と積分がされたものの和となる.

こうして生成された各項はダイアグラムで表せる. (これはまだ, 完全なファインマン・ダイアグラム形式ではない. それは, まだダイアグラムの各要素と数量とを関係付けていないからだ. ここでは, 単に 3 元運動量デルタ関数を勘定する目的でのみダイアグラムを使う.) $V(t)$ 演算子一つにつき一つの点, 合計 n 個の点を書く. これらは, 頂点 (vertex) と呼ばれる. ある $V(t)$ の消滅演算子の一つを, 初期状態 Φ_α の生成演算子を一つ越えて動かした時にできるデルタ関数一つにつき, 下からダイアグラムに入ってきて, その対応する頂点で終わる線を 1 本書く. 終状態 Φ_β の共役にある消滅演算子を一つ, ある $V(t)$ の一つの生成演算子を越えて動かしたときにできるデルタ関数一つにつき, 対応する頂点から上に向かってダイアグラムを出て行く線を書く. ある $V(t)$ の消滅演算子を一つ, 他の $V(t)$ の一つの生成演算子を越えて動かした時にできるデルタ関数一つにつき, 対応する二つの頂点を結ぶ線を書く. 最後に, 終状態 Φ_β の共役にある消滅演算子を一つ, 初期状態 Φ_α の生成演算子一つを越えて動かした時にできるデルタ関数一つにつき, 下から上までダイアグラムを越えて結ぶ線を書く. これらの線にともなうデルタ関数は, その線で表される生成・消滅演算子対の 3 元運動量を等しくする. また, それぞれの頂点にはデルタ関数が一つずつともない, これは頂点での 3 元運動量の総和をゼロにする.

このようなダイアグラムは連結 (全ての点が何本かの線を通じて他のどの点ともつながっている) であるか, もし, 連結でなければ, 幾つかの連結した部分からなっている. 一つの連結部分の中の頂点に対応

する $V(t)$ 演算子は, 任意の他の連結部分の中の頂点に対応する $V(t)$ と実質上可換だ. これは, このダイアグラムについては, どちらの頂点の消滅演算子も他方の頂点の生成演算子によって作られる粒子を消滅させないからだ. もし消滅させていれば, これらの二つの頂点は同じ連結部分に含まれなければならない. したがって, (4.4.3) の行列要素は各連結部分の寄与の積の和として表される.

$$\left(\Phi_\beta, T\Big\{V(t_1)\cdots V(t_n)\Big\}\Phi_\alpha\right)$$
$$= \sum_{クラスター} (\pm) \prod_{j=1}^{\nu} \left(\Phi_{\beta_j}, T\Big\{V(t_{j_1})\cdots V(t_{jn_j})\Big\}\Phi_{\alpha_j}\right)_{\mathrm{C}} . \quad (4.4.5)$$

ここで, 和は始状態および終状態の粒子と $V(t)$ の演算子を ν 個のクラスターに分ける仕方全てについて (と, ν について 1 から n まで) とる. n_j 個の演算子 $V(t_{j_1})\cdots V(t_{jn_j})$ と初期状態の粒子の部分集合 α_j と終状態の粒子の部分集合 β_j は全て j 番目のクラスターに属する. もちろん, これは

$$n = n_1 + \cdots + n_\nu$$

を意味するし, 集合 α は全ての部分集合 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\nu$ の和集合であり, また, それは終状態についても同じだ. (4.4.5) のうち, 幾つかのクラスターは頂点を全く含まない, つまり, $n_j = 0$ ということもある. これらの因子については, (4.4.5) の行列要素因子は, β_j と α_j が共に 1 粒子状態 (そのときこの因子は $\delta(\alpha_j - \beta_j)$) でないとゼロとなる. これは, 頂点を持たない連結なダイアグラムは, 1 粒子が下から上まで走っているものだけだからだ. 一番重要なのは, (4.4.5) の添字 C は非連結ダイアグラム, つまり, どれかの $V(t)$ 演算子か, 始状態か終状態の粒子が粒子の生成や消滅で他の粒子とつながっていないものからの寄与は含まれていないことを意味するということだ.

さて, (4.4.5) を (4.4.3) の和に適用しよう. 全ての時間変数は$-\infty$ から$+\infty$ に積分される. したがって, $t_1, \cdots t_n$ のどれがどのクラスター

に配分されるかは重要ではない. したがって, クラスターの仕方についての和は, $n!/n_1!n_2!\cdots n_\nu!$ の因子を与える. この因子は n 個の頂点を各々が $n_1, n_2, \cdots$ 個の頂点を含む ν 個のクラスターに分ける仕方の数だ.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots dt_n \Big(\Phi_\beta,\ T\Big\{V(t_1)\cdots V(t_n)\Big\}\Phi_\alpha\Big)$$
$$= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_\nu!} \sum_{\text{PART}} (\pm) \sum_{\substack{n_1\cdots n_\nu \\ n_1+\cdots+n_\nu=n}} \prod_{j=1}^{\nu} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{j_1}\cdots dt_{jn_j}$$
$$\times\Big(\Phi_{\beta_j}, T\Big\{V(t_{j_1})\cdots V(t_{jn_j})\Big\}\Phi_{\alpha_j}\Big)_{\text{C}} .$$

この式の最初の和は, 始状態と終状態の粒子を, $\alpha_1\cdots\alpha_\nu$ と $\beta_1\cdots\beta_\nu$ のクラスターに分ける仕方全てについての (クラスターの数 ν についての和も含む) ものだ. この因子 $n!$は (4.4.3) の $1/n!$を打消し, (4.4.5) の摂動級数の $(-i)^n$ の因子は積 $(-i)^{n_1}\cdots(-i)^{n_\nu}$と書けるから, $n_1+\cdots+n_\nu=n$ の拘束のもとで $n_1,\cdots n_\nu$について和をとり, その後で, n について和をとる代りに, 単に $n_1,\cdots n_\nu$について独立に和をとればよい. これにより, 最終的に以下を得る.

$$S_{\beta\alpha} = \sum_{\text{PART}} (\pm) \prod_{j=1}^{\nu} \sum_{n_j=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n_j}}{n_j!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_{j_1}\cdots dt_{jn_j}$$
$$\times\ \Big(\Phi_{\beta_j},\ T\Big\{V(t_{j_1})\cdots V(t_{jn_j}\Big\}\Phi_{\alpha_j}\Big)_{\text{C}} .$$

これを (4.3.2) の連結行列要素 $S^{\text{C}}_{\beta\alpha}$ の定義と比較すると, これらの行列要素は, ちょうどこの積の因子で与えられることがわかる.

$$S^{\text{C}}_{\beta\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1\cdots dt_n\ \Big(\Phi_\beta, T\Big\{V(t_1)\cdots V(t_n)\Big\}\Phi_\alpha\Big)_{\text{C}} . \tag{4.4.6}$$

(添字 jはいまや単なる和と積分の変数なので, 全ての t と n から落とした.) $S^{\text{C}}_{\beta\alpha}$ はいまや非常に簡単な処方箋で計算できることがわかった.

$S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ は連結な S 行列への寄与全てであり，この意味で，どれかの$V(t)$演算子か，どれかの始状態か終状態の粒子が粒子の生成や消滅で他のどの粒子ともつながっていないものからの寄与は落とせばよい．この理由で，S^{C}に「連結」を意味する添字 C が付いていたわけだ．

上にみたように各頂点と各線に沿って運動量が保存されているので，S 行列の連結部分はそれぞれ運動量を保存する，つまり，$S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ は因子 $\delta^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha)$ を含む．ここで，証明したいのは，$S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ が他にデルタ関数を含まないことだ．

ここで，ハミルトニアンを生成・消滅演算子で展開した (4.4.1) の係数関数 h_{NM}は，運動量保存を保証するただ一つの3次元デルタ関数のみに比例すると仮定する．自由粒子のハミルトニアン H_0は必ずこれを満たしているので，相互作用 Vもこの仮定を満たしていることになる．これまで使ってきた行列要素のダイアグラム的な解釈に戻ると，これは全ての頂点が3次元デルタ関数を一つずつ寄与することを意味する．(行列要素 $V_{\gamma\delta}$ の他のデルタ関数は，単にその頂点で生成・消滅されない粒子の運動量を変化させないだけだ.) さて，これらのデルタ関数のほとんどは単に中間の粒子の運動量を決定するだけだ．このようなデルタ関数で決定されない運動量は内線のループを回る運動量だけだ．(もし切るとダイアグラムが非連結になるような線は，運動量保存則によりダイアグラムに入る粒子か出る粒子の運動量の線形結合で決まる一定の運動量を持つ．もし，ダイアグラムが L 本の線を同時に切っても連結に留まるならば，L 本の独立なループがあると言い，運動量保存で決まらない L 個の運動量がある.) V個の頂点と，I本の内線と，L 個のループがあれば，V個のデルタ関数があり，その内，$I-L$ 個は内線の運動量を決定し，$V-I+L$ 個のデルタ関数が始状態と終状態の粒子の運動量を関係付ける．しかし，よく知られたトポロジー的な恒等式により，** C 個の連結部分からなるどのようなグラフ

** 頂点一つからなるグラフは $V=1$, $L=0$, $C=1$ だ．もし，$V-1$ 個の頂点を，

でも, 頂点と内線とループの数は, 以下の関係式を満たす.

$$V - I + L = C\,. \tag{4.4.7}$$

したがって, $C = 1$ のグラフで与えられる $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ のような連結行列要素は, ちょうど一つの3次元デルタ関数 $\delta^3(\mathbf{p}_\beta - \mathbf{p}_\alpha)$ を持つことになる. これが証明すべきことだった.

上の議論で, 時間変数を$-\infty$から$+\infty$まで積分したのは重要ではない. したがって, 全く同じ議論で, もしハミルトニアンの係数 $h_{N,M}$ がデルタ関数を一つだけ含めば, $U(t, t_0)$ もまた, それぞれ一つずつの運動量保存のデルタ関数因子を含む連結部分に分解できることがいえる. 一方, S 行列の連結部分はエネルギー保存のデルタ関数も含むから, 6章でファインマン・ダイアグラムを扱う際には, $S^{\mathrm{C}}_{\beta\alpha}$ が一つだけエネルギー保存のデルタ関数 $\delta(E_\beta - E_\alpha)$ を含み, $U(t, t_0)$ はエネルギー保存のデルタ関数を全く含まないことがわかる.

(4.4.1) の h_{NM} が3次元運動量保存のデルタ関数を一つだけ含むという要請は, 自明なものというには程遠く, 多くの結果につながることを強調しておく. 例えば, V が2粒子状態の間でゼロでない行列要素をもつとしよう. このとき, (4.4.1) は $N = M = 2$ で以下の係数の項を持つ.

$$v_{2,2}(\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_2) = V_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2,\mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_2}\,. \tag{4.4.8}$$

(ここで, 一時的にスピンと種類の添字を省略している.) しかし, このとき, 3粒子状態の間の相互作用の行列要素は,

$$\begin{aligned} V_{\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\mathbf{p}'_3,\mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_2\,\mathbf{p}_3} &= v_{3,3}(\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\mathbf{p}'_3, \mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_2\,\mathbf{p}_3) \\ &\quad + v_{2,2}(\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)\,\delta^3(\mathbf{p}'_3 - \mathbf{p}_3) \pm [\text{置換}] \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

グラフを連結なまま保つのにちょうど必要なだけの線と共に加えると, $I = V - 1$, $L = 0$, $C = 1$ となる. このグラフに内線をさらに (新たに頂点は作らず) 加えると, その本数だけのループができるから, $I = V + L - 1$, $C = 1$ となる. もし, 非連結グラフが C 個のこのような連結部分からなれば, それぞれの連結部分の I, V, L の和は $\sum I = \sum V + \sum L - C$ を満たすこととなる.

となる.

この章の最初に述べたように, $v_{2,2}$ を 2 体の S 行列がローレンツ不変になるように選び, 残りのハミルトニアンを 3 粒子以上を含む状態で散乱が起きないように調節することで, 場の理論ではない相対論的量子論を構成することも考えられる. そうすると, $v_{3,3}$ を (4.4.9) の他の項を消すように,

$$v_{3,3}(\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2\mathbf{p}'_3, \mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_2\,\mathbf{p}_3) = -v_{2,2}(\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)\,\delta^3(\mathbf{p}'_3 - \mathbf{p}_3) \mp \text{[置換]}. \tag{4.4.10}$$

と選ばなければならない. しかし, こうすると, $v_{3,3}$ の各項は, 二つのデルタ関数を因子として含み, ($v_{2,2}(\mathbf{p}'_1\mathbf{p}'_2, \mathbf{p}_1\mathbf{p}_2)$ は因子 $\delta^3(\mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ を持っていた), これはクラスター分解原理を破ることになる. したがって, クラスター分解原理を満たす理論では, 2 粒子に散乱が起こると, 3 粒子以上の散乱は不可避だ.

＊＊＊

クラスター分解原理を満たすように量子論で 3 体問題を解決しようとすると, (4.4.9) の $v_{3,3}$ の項は問題を起こさないものの, 他の項の余分なデルタ関数のためにリップマン・シュウィンガー方程式を直接解くのが難しくなる. 問題は, これらのデルタ関数のために, 全体の運動量保存のデルタ関数を取り除いた後でも, この方程式の核 $[E_\alpha - E_\beta + i\epsilon]^{-1}V_{\beta\alpha}$ が 2 乗可積分にならないことだ. このため, これは非常に大きな階数の有限行列によってさえも近似することができない. この 3 個以上の粒子を含む問題を解決するには, リップマン・シュウィンガー方程式を右辺が連結部分からなるように書き換える必要がある. そのような方程式は 3 粒子以上の散乱について求められていて,[8,9] 非相対論的な問題については反復法で解ける. しかし, この理論は相対論では役に立たないので, ここでは細かくは述べない.

しかし, リップマン・シュウィンガー方程式をこのように書き換える

ことは他の意味で有益だ. この節での議論は摂動論に依ってきた. 私は, この節の中心的定理の非摂動論的な証明を知らない. しかし, 非摂動的な方程式であるリップマン・シュウィンガー方程式を書き換えたこの方程式は, ハミルトニアンの係数関数 $h_{N,M}$ が運動量保存のデルタ関数を一つだけ含む限り, クラスター分解原理から要請されるように, $U^{\mathrm{C}}(t,t_0)$ (したがって, S^{C} も) が運動量保存のデルタ関数を一つだけ含むべきとの要求と矛盾しないことが知られている.[9]

問題

1. S 行列とその連結部分の生成汎関数を以下のように定義する.

$$F[v] \equiv 1 + \sum_{N=1}^{\infty}\sum_{M=1}^{\infty}\frac{1}{N!M!}\int v^*(q_1')\cdots v^*(q_N')v(q_1)\cdots v(q_M) \\ \times S_{q_1'\cdots q_N',\, q_1\cdots q_M}\, dq_1'\cdots dq_N'\, dq_1\cdots dq_M\ ,$$

$$F^{\mathrm{C}}[v] \equiv \sum_{N=1}^{\infty}\sum_{M=1}^{\infty}\frac{1}{N!M!}\int v^*(q_1')\cdots v^*(q_N')v(q_1)\cdots v(q_M) \\ \times S^{\mathrm{C}}_{q_1'\cdots q_N',\, q_1\cdots q_M}\, dq_1'\cdots dq_N'\, dq_1\cdots dq_M .$$

$F[v]$ と $F^{\mathrm{C}}[v]$ を関連づける表式を導け. (純粋にボソン的な場合を考えてよい.)

2. 以下の作用を考える.

$$V = g\int d^3\mathbf{p}_1\, d^3\mathbf{p}_2\, d^3\mathbf{p}_3\, d^3\mathbf{p}_4\ \delta^3(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_4) \\ \times\ a^\dagger(\mathbf{p}_1)\, a^\dagger(\mathbf{p}_2)\, a(\mathbf{p}_3)\, a(\mathbf{p}_4)\ .$$

ここで g は実の定数で, $a(\mathbf{p})$ はスピンの無い質量 $M>0$ のボソンの消滅演算子だ. 摂動論を使って, これらの粒子の重心系での散乱の S 行列要素を g の次数まで計算せよ. また, それに対応する微分散乱断面積はどうなるか?

3. コヒーレント状態 Φ_λ は消滅演算子 $a(q)$ の固有値 $\lambda(q)$ を持つ固有状態だ．そのような状態を多粒子状態 $\Phi_{q_1 q_2 \cdots q_N}$ の重ね合せとして表せ．

参考文献

1. クラスター分解原理を最初に場の量子論で陽に述べたのは，以下の論文と思われる．E. H. Wichmann and J. H. Crichton, *Phys. Rev.* **132**, 2788 (1963).

2. 例えば，B. Bakamijian and L. H. Thomas, *Phys. Rev.* **92**, 1300 (1953) を見よ．

3. 文献としては，T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **113**, 1165 (1959) がある．

4. J. Goldstone, *Proc. Roy. Soc. London* **A239**, 267 (1957).

5. N. M. Hugenholtz, *Physica* **23**, 481 (1957).

6. 例えば，R. Kubo, *J. Math. Phys.* **4**, 174 (1963) を見よ．

7. E. C. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (Oxford University Press, Oxford, 1937) 1.8 節．

8. L. D. Faddeev. *Zh. Ekxper. i Teor. Fiz.* **39**. 1459 (1961) (英訳は，*Soviet Phys — JETP* **12**, 1014 (1961)); *Dokl. Akad. Nauk. SSSR* **138**, 565 (1961) と **145**, 30 (1962) (英訳は，*Soviet Physics — Doklady* **6**, 384 (1961) と **7**, 600 (1963)).

9. S. Weinberg, *Phys. Rev.* **133**, B232 (1964).

第 5 章

量子場と反粒子

以上で量子場を導入する動機付けに必要な事柄がすべて揃った[1]. この章で量子場を構成するなかで, 相対論と量子力学を結合した結果のうちいくつかの最も注目すべきで普遍的なものをみる. それはスピンと統計の関係, 反粒子の存在, 有名な CPT 定理を含む粒子と反粒子の様々な関係だ.

5.1 自由場

3 章で見たように, S 行列は, 相互作用が,

$$V(t) = \int d^3x\, \mathcal{H}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) \tag{5.1.1}$$

と書ければローレンツ不変だ. ここで $\mathcal{H}$ は,

$$U_0(\Lambda, a)\mathcal{H}(x)U_0^{-1}(\Lambda, a) = \mathcal{H}(\Lambda x + a) \tag{5.1.2}$$

の意味でスカラーであり, かつ付加的な条件,

$$(x - x')^2 \geq 0 \quad \text{のとき} \quad [\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')] = 0 \tag{5.1.3}$$

を満たす．後で見るように，これよりもっと一般的なものも可能性だが，そのどれもこれとあまり違いはない．(今の所，ここでの Λ が固有順時ローレンツ変換に限られるか，あるいは空間反転を含むかは未解決の問題として残しておく.) また，クラスター分解原理を容易に満たすためには $\mathcal{H}(x)$ を生成・消滅演算子から構成する．しかし，ここで一つの問題に直面する．すなわち (4.2.12) に示されたように，ローレンツ変換のもとでそのような演算子の各々にはその演算子が持つ運動量に依存する行列がかかる．どのようにすれば，そのような演算子をつなぎ合わせてスカラーを作れるのだろう? 答は，$\mathcal{H}(x)$ を場，すなわち消滅場 $\psi_\ell^+(x)$ と生成場 $\psi_\ell^-(x)$，

$$\psi_\ell^+(x) = \sum_{\sigma n} \int d^3p\, u_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n) a(\mathbf{p},\sigma,n)\,, \tag{5.1.4}$$

$$\psi_\ell^-(x) = \sum_{\sigma n} \int d^3p\, v_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n) a^\dagger(\mathbf{p},\sigma,n) \tag{5.1.5}$$

から構成することだ．ここで係数* $u_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n)$ と $v_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n)$ はローレンツ変換のもとで位置に依らない行列が各々の場にかかるように選ぶ．

$$U_0(\Lambda,a)\psi_\ell^+(x)U_0^{-1}(\Lambda,a) = \sum_{\bar\ell} D_{\ell\bar\ell}(\Lambda^{-1})\psi_{\bar\ell}^+(\Lambda x + a)\,, \tag{5.1.6}$$

$$U_0(\Lambda,a)\psi_\ell^-(x)U_0^{-1}(\Lambda,a) = \sum_{\bar\ell} D_{\ell\bar\ell}(\Lambda^{-1})\psi_{\bar\ell}^-(\Lambda x + a)\,. \tag{5.1.7}$$

(原理的には変換行列 $D^\pm$ は消滅場と生成場とで異なり得る．しかし後で見るように，これらの行列が同じになるように場を選ぶことは常に可能だ.) 別のローレンツ変換 $\bar\Lambda$ を適用すれば，

$$D(\Lambda^{-1})D(\bar\Lambda^{-1}) = D((\bar\Lambda\Lambda)^{-1})$$

*注：添字 n と σ はそれぞれ，全ての異なる粒子の種類とスピンの z 成分をとる．

となり, よって, $\Lambda_1 = (\Lambda)^{-1}$ および $\Lambda_2 = (\bar{\Lambda})^{-1}$ ととれば, D 行列は斉次ローレンツ群の表現を与えることがわかる:

$$D(\Lambda_1)D(\Lambda_2) = D(\Lambda_1\Lambda_2)\,. \tag{5.1.8}$$

そのような表現はたくさんある. それには, スカラー $D(\Lambda) = 1$, ベクトル $D(\Lambda)^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\nu$, および多くのテンソルとスピノル表現が含まれる. これらの特定の表現は, 基底の選び方によって全ての $D(\Lambda)$ を 2 個以上のブロックを持つ同一のブロック対角な形にすることはできないという意味で, 既約だ. しかし, 現時点では $D(\Lambda)$ が既約であることは要求せず, それは一般にブロック対角な行列で, ブロック内では任意の配列の既約表現になっているとする. すなわち, ここでの指標 ℓ は, 個々の既約表現の成分ばかりでなく, 記述される粒子の型および異なるブロック内の既約表現に関する添字を含む. 後でこれらの場を, 既約場に分解し, その各々が単一の粒子の種類 (およびその反粒子) を記述し, ローレンツ群のもとで既約表現として変換するようにする.

ローレンツ変換則 (5.1.6) および (5.1.7) を満たす場を構成する方法が一旦わかれば, 相互作用密度を,

$$\mathcal{H}(x) = \sum_{NM}\sum_{\ell'_1\cdots\ell'_N}\sum_{\ell_1\cdots\ell_M} g_{\ell'_1\cdots\ell'_N,\,\ell_1\cdots\ell_M} \times\ \psi^-_{\ell'_1}(x)\cdots\psi^-_{\ell'_N}(x)\ \psi^+_{\ell_1}(x)\cdots\psi^+_{\ell_M}(x) \tag{5.1.9}$$

と構成できる. ここで, 定係数 $g_{\ell'_1\cdots\ell'_N,\,\ell_1\cdots\ell_M}$ が全ての Λ について,

$$\sum_{\ell'_1\cdots\ell'_N}\sum_{\ell_1\cdots\ell_M} D_{\ell'_1\bar{\ell}'_1}(\Lambda^{-1})\cdots D_{\ell'_N\bar{\ell}'_N}(\Lambda^{-1})D_{\ell_1\bar{\ell}_1}(\Lambda^{-1})\cdots D_{\ell_M\bar{\ell}_M}(\Lambda^{-1}) \times g_{\ell'_1\cdots\ell'_N\ell_1\cdots\ell_M} = g_{\bar{\ell}'_1\cdots\bar{\ell}'_N\bar{\ell}_1\cdots\bar{\ell}_M} \tag{5.1.10}$$

を満たすようにローレンツ共変に選ばれるならば, (5.1.9) の $\mathcal{H}(x)$ は (5.1.2) の意味でスカラーだ. (これらの場の成分の微分は別の種類の場の成分とみなすので, ここでは微分を含んでいない.) (5.1.10) を満

たす係数 $g_{\ell'_1\cdots\ell'_N,\,\ell_1\cdots\ell_M}$ を見つける作業は，クレブシュ・ゴルダン係数を用いて 3 次元回転群の様々な表現を結合して回転に関するスカラーを作る作業とは原理的に同じだ (しかも実際に行うのもそれほど難しいわけではない). 後で見るように，生成場と消滅場を組み合わせて，この相互作用密度が空間的に離れた時空点で自分自身と交換するようにできる.

さて，係数関数 $u_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n)$ および $v_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n)$ としては何をとればよいだろうか. (4.2.12) とその共役式から消滅演算子と生成演算子の変換則,**

$$U_0(\Lambda,b)a(\mathbf{p},\sigma,n)U_0^{-1}(\Lambda,b)=\exp\Big(i(\Lambda p)\cdot b\Big)\sqrt{(\Lambda p)^0/p^0}\times\sum_{\bar\sigma}D^{(j_n)}_{\sigma\bar\sigma}\Big(W^{-1}(\Lambda,p)\Big)a(\mathbf{p}_\Lambda,\bar\sigma,n)\,, \tag{5.1.11}$$

$$U_0(\Lambda,b)a^\dagger(\mathbf{p},\sigma,n)U_0^{-1}(\Lambda,b)=\exp\Big(-i(\Lambda p)\cdot b\Big)\sqrt{(\Lambda p)^0/p^0}\times\sum_{\bar\sigma}D^{(j_n)*}_{\sigma\bar\sigma}\Big(W^{-1}(\Lambda,p)\Big)a^\dagger(\mathbf{p}_\Lambda,\bar\sigma,n) \tag{5.1.12}$$

が得られる. ここで j_n は種類 n の粒子のスピン，また $\mathbf{p}_\Lambda$ は Λp の 3 元ベクトルの部分だ. ((5.1.11) と (5.1.12) の両方をここで示した形に変形するのに回転行列 $D^{(j_n)}_{\sigma\bar\sigma}$ のユニタリー性を用いた.) また，2.5 節で見たように体積要素 d^3p/p^0 はローレンツ不変であり，よって (5.1.4) と (5.1.5) の d^3p を $d^3(\Lambda p)p^0/(\Lambda p)^0$ で置き換えてよい. これら全てを考慮すると,

$$U_0(\Lambda,b)\psi^+_\ell(x)U_0^{-1}(\Lambda,b)=\sum_{\sigma\bar\sigma n}\int d^3(\Lambda p)\;u_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n)\times\;\exp\Big(i(\Lambda p)\cdot b\Big)D^{(j_n)}_{\sigma\bar\sigma}\Big(W^{-1}(\Lambda,p)\Big)\sqrt{p^0/(\Lambda p)^0}\,a(\mathbf{p}_\Lambda,\bar\sigma,n)$$

** これは質量を持つ粒子の場合だ. 質量ゼロ粒子の場合は 5.9 節で取り扱う.

および,

$$U_0(\Lambda,b)\psi_\ell^-(x)U_0^{-1}(\Lambda,b)=\sum_{\sigma\bar\sigma n}\int d^3(\Lambda p)\ v_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n)$$
$$\times\ \exp\Big(-i(\Lambda p)\cdot b\Big)D^{(j_n)*}_{\sigma\bar\sigma}\Big(W^{-1}(\Lambda,p)\Big)\sqrt{p^0/(\Lambda p)^0}\,a^\dagger(\mathbf{p}_\Lambda,\bar\sigma,n)$$

となる. したがって, 場がローレンツ変換則 (5.1.6) と (5.1.7) を満たすための必要十分条件は, 以下の通りであることがわかる.

$$\sum_{\bar\ell}D_{\ell\bar\ell}(\Lambda^{-1})u_{\bar\ell}(\Lambda x+b;\mathbf{p}_\Lambda,\sigma,n)=\sqrt{p^0\Big/(\Lambda p)^0}$$
$$\times\ \sum_{\bar\sigma}D^{(j_n)}_{\sigma\bar\sigma}\Big(W^{-1}(\Lambda,p)\Big)\exp\Big(+i(\Lambda p)\cdot b\Big)u_\ell(x;\mathbf{p},\bar\sigma,n)$$

と,

$$\sum_{\bar\ell}D_{\ell\bar\ell}(\Lambda^{-1})v_{\bar\ell}(\Lambda x+b;\mathbf{p}_\Lambda,\sigma,n)=\sqrt{p^0\Big/(\Lambda p)^0}$$
$$\times\ \sum_{\bar\sigma}D^{(j_n)*}_{\sigma\bar\sigma}\Big(W^{-1}(\Lambda,p)\Big)\exp\Big(-i(\Lambda p)\cdot b\Big)v_\ell(x;\mathbf{p},\bar\sigma,n)\ .$$

これらはもう少し便利なように書き換えると,

$$\sum_{\bar\sigma}u_{\bar\ell}(\Lambda x+b;\mathbf{p}_\Lambda,\bar\sigma,n)D^{(j_n)}_{\bar\sigma\sigma}\Big(W(\Lambda,p)\Big)=\sqrt{p^0\Big/(\Lambda p)^0}$$
$$\times\ \sum_\ell D_{\bar\ell\ell}(\Lambda)\exp\Big(i(\Lambda p)\cdot b\Big)u_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n) \tag{5.1.13}$$

と,

$$\sum_{\bar\sigma}v_{\bar\ell}(\Lambda x+b;\mathbf{p}_\Lambda,\bar\sigma,n)D^{(j_n)*}_{\bar\sigma\sigma}\Big(W(\Lambda,p)\Big)=\sqrt{p^0\Big/(\Lambda p)^0}$$
$$\times\ \sum_\ell D_{\bar\ell\ell}(\Lambda)\exp\Big(-i(\Lambda p)\cdot b\Big)v_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n) \tag{5.1.14}$$

となる. これらは係数関数 u_ℓ と v_ℓ を有限個の自由なパラメータを使って表すことを可能にする基本的な条件だ.

(5.1.13) と (5.1.14) を 3 段階で用いて, 固有順時ローレンツ変換の三つの異なる型を順番に考察する.

並進

まず (5.1.13) と (5.1.14) で $\Lambda = 1$ とおいて, 任意の b について考察する. ただちに $u_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n)$ と $v_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n)$ が,

$$u_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n) = (2\pi)^{-3/2}e^{ip\cdot x}u_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)\;, \tag{5.1.15}$$

$$v_\ell(x;\mathbf{p},\sigma,n) = (2\pi)^{-3/2}e^{-ip\cdot x}v_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)\;, \tag{5.1.16}$$

の形をとらねばならないことがわかる. よって場は以下のフーリエ変換だ.

$$\psi^+_\ell(x) = \sum_{\sigma,n}(2\pi)^{-3/2}\int d^3p\; u_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)e^{ip\cdot x}a(\mathbf{p},\sigma,n)\;, \tag{5.1.17}$$

$$\psi^-_\ell(x) = \sum_{\sigma,n}(2\pi)^{-3/2}\int d^3p\; v_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)e^{-ip\cdot x}a^\dagger(\mathbf{p},\sigma,n)\;. \tag{5.1.18}$$

(因子 $(2\pi)^{-3/2}$ は u_ℓ と v_ℓ の定義に吸収できるが, これらのフーリエ積分の中に陽に示すのが慣例だ.) (5.1.15) と (5.1.16) を用いると,

$$\sum_{\bar\sigma} u_{\bar\ell}(\mathbf{p}_\Lambda,\bar\sigma,n)D^{(j_n)}_{\bar\sigma\sigma}\Big(W(\Lambda,p)\Big) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}}\sum_\ell D_{\bar\ell\ell}(\Lambda)u_\ell(\mathbf{p},\sigma,n) \tag{5.1.19}$$

と,

$$\sum_{\bar\sigma} v_{\bar\ell}(\mathbf{p}_\Lambda,\bar\sigma,n)D^{(j_n)*}_{\bar\sigma\sigma}\Big(W(\Lambda,p)\Big) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}}\sum_\ell D_{\bar\ell\ell}(\Lambda)v_\ell(\mathbf{p},\sigma,n) \tag{5.1.20}$$

が任意の斉次ローレンツ変換 Λ について成り立てば, またそのときに限り, (5.1.13) と (5.1.14) が満たされることがわかる.

ブースト

次に (5.1.19) と (5.1.20) で $\mathbf{p}=0$ と置き, Λ を, 質量 m の粒子を静止状態からある 4 元運動量 q^μ の状態に移す基準ブーストにとる. すると, $L(p)=1$ であり,

$$W(\Lambda,p)\equiv L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)=L^{-1}(q)L(q)=1$$

だ. よってこの特別な場合には, (5.1.19) と (5.1.20) は,

$$u_{\bar\ell}(\mathbf{q},\sigma,n)=(m/q^0)^{1/2}\sum_\ell D_{\bar\ell\ell}(L(q))\;u_\ell(0,\sigma,n) \tag{5.1.21}$$

と,

$$v_{\bar\ell}(\mathbf{q},\sigma,n)=(m/q^0)^{1/2}\sum_\ell D_{\bar\ell\ell}(L(q))\;v_\ell(0,\sigma,n) \tag{5.1.22}$$

を与える. 言い換えれば, ゼロ運動量での量 $u_\ell(0,\sigma,n)$ と $v_\ell(0,\sigma,n)$ が分かり, 次に斉次ローレンツ群の与えられた表現 $D(\Lambda)$ が分かれば, 全ての $\mathbf{p}$ について関数 $u_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)$ と $v_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)$ がわかる. (斉次ローレンツ群の任意の表現に対する行列 $D_{\bar\ell\ell}(L(q))$ の陽な式は, 5.7 節で与える.)

回転

次に, $\mathbf{p}=0$ ととるが, 今度は Λ が $\mathbf{p}_\Lambda=0$ のローレンツ変換とする. すなわち Λ を回転 R にとる. すると明らかに $W(\Lambda,p)=R$ であり, よって (5.1.19) と (5.1.20) は,

$$\sum_{\bar\sigma}u_{\bar\ell}(0,\bar\sigma,n)\,D^{(j_n)}_{\bar\sigma\sigma}(R)=\sum_\ell D_{\bar\ell\ell}(R)u_\ell(0,\sigma,n) \tag{5.1.23}$$

および,

$$\sum_{\bar\sigma}v_{\bar\ell}(0,\bar\sigma,n)\,D^{(j_n)*}_{\bar\sigma\sigma}(R)=\sum_\ell D_{\bar\ell\ell}(R)v_\ell(0,\sigma,n) \tag{5.1.24}$$

となる. あるいは同等だが,

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{\ell}}(0,\bar{\sigma},n)\mathbf{J}^{(j_n)}_{\bar{\sigma}\sigma} = \sum_{\ell} \mathcal{J}_{\bar{\ell}\ell} u_{\ell}(0,\sigma,n) \tag{5.1.25}$$

および,

$$\sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{\ell}}(0,\bar{\sigma},n)\mathbf{J}^{(j_n)*}_{\bar{\sigma}\sigma} = -\sum_{\ell} \mathcal{J}_{\bar{\ell}\ell} v_{\ell}(0,\sigma,n) \tag{5.1.26}$$

だ. ここで $\mathbf{J}^{(j)}$ と $\mathcal{J}$ はそれぞれ表現 $D^{(j)}(R)$ と $D(R)$ における角運動量行列だ. 斉次ローレンツ群の任意の表現 $D(\Lambda)$ は, Λ を回転 R に限れば明らかに回転群の表現を与える. よって, (5.1.25) と (5.1.26) よりわかるように, 場 $\psi^{\pm}_{\ell}(x)$ がある特定のスピン j の粒子を記述するとき, この表現 $D(R)$ はその既約成分のなかにスピン j 表現 $D^{(j)}(R)$ を含まねばならない. また係数 $u_{\ell}(0,\sigma,n)$ と $v_{\ell}(0,\sigma,n)$ は単に回転群のスピン j 表現が $D(R)$ の中にどのように埋め込まれるかを記述するだけだ. 5.5 節で見るように, 固有順時ローレンツ群の各々の既約表現は回転群の任意の与えられた既約表現をせいぜい 1 回だけ含む. よってもし場 $\psi^{+}_{\ell}(x)$ と $\psi^{-}_{\ell}(x)$ が既約的に変換するなら, それは全体のスケールを除いて一意的だ. より一般的には, 消滅場と生成場の自由なパラメータの数は (全体のスケールを含めて) 場に含まれる既約表現の数に等しい.

(5.1.23) と (5.1.24) を満たす $u_{\ell}(0,\sigma,n)$ と $v_{\ell}(0,\sigma,n)$ を用いた (5.1.21) と (5.1.22) で与えられる係数関数 $u_{\ell}(\mathbf{p},\sigma,n)$ と $v_{\ell}(\mathbf{p},\sigma,n)$ が, もっと一般的な条件 (5.1.19) と (5.1.20) を自動的に満たすことを示すのは容易だ. これは読者の練習問題として残しておく.

さて, クラスター分解の原理に戻ろう. (5.1.17) と (5.1.18) を (5.1.9) に代入して $\mathbf{x}$ について積分すると, 相互作用ハミルトニアンは,

$$V = \sum_{NM} \int d^3\mathbf{p}'_1 \cdots d^3\mathbf{p}'_N \, d^3\mathbf{p}_1 \cdots d^3\mathbf{p}_M \sum_{\sigma'_1\cdots\sigma'_N} \sum_{\sigma_1\cdots\sigma_M} \sum_{n'_1\cdots n'_N} \sum_{n_1\cdots n_M}$$

$$
\times\, a^\dagger(\mathbf{p}_1'\,\sigma_1'\,n_1')\cdots a^\dagger(\mathbf{p}_N'\,\sigma_N'\,n_N')\,a(\mathbf{p}_M\sigma_M n_M)\cdots a(\mathbf{p}_1 s_1 n_1)
$$

$$
\times\, \mathcal{V}_{NM}(\mathbf{p}_1'\,\sigma_1'\,n_1'\cdots\mathbf{p}_N'\,\sigma_N'\,n_N'\ ,\ \mathbf{p}_1\sigma_1 n_1\cdots\mathbf{p}_M\sigma_M n_M) \tag{5.1.27}
$$

となり, 係数関数は,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_{NM}(\mathbf{p}_1'\,\sigma_1'\,n_1'\cdots,\mathbf{p}_1\sigma_1 n_1\cdots) &= \delta^3(\mathbf{p}_1' + \cdots - \mathbf{p}_1 - \cdots) \\
&\quad \times\, \tilde{\mathcal{V}}_{NM}(\mathbf{p}_1'\,\sigma_1'\,n_1'\cdots,\mathbf{p}_1\sigma_1 n_1\cdots)
\end{aligned} \tag{5.1.28}
$$

で与えられる. ここで,

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\mathcal{V}}_{NM}(\mathbf{p}_1'\,\sigma_1'\,n_1'\cdots\mathbf{p}_N'\,\sigma_N'\,n_N'\ ,\ \mathbf{p}_1\sigma_1 n_1\cdots\mathbf{p}_M\sigma_M n_M) \\
&= (2\pi)^{3-3N/2-3M/2} \\
&\quad \times \sum_{\ell_1'\cdots\ell_N'}\sum_{\ell_1\cdots\ell_M} g_{\ell_1'\cdots\ell_N',\ell_1\cdots\ell_M}\, v_{\ell_1'}(\mathbf{p}_1'\,\sigma_1'\,n_1')\cdots v_{\ell_N'}(\mathbf{p}_N'\,\sigma_N'\,n_N') \\
&\quad \times u_{\ell_1}(\mathbf{p}_1\sigma_1 n_1)\cdots u_{\ell_M}(\mathbf{p}_M\sigma_M n_M)
\end{aligned} \tag{5.1.29}
$$

だ. この相互作用は明らかに, S 行列がクラスター分解の原理を満たすことを保証する形をしている. すなわち, $\mathcal{V}_{NM}$ はただ一つのデルタ関数の因子を持つ. その係数 $\tilde{\mathcal{V}}_{NM}$ は (少なくとも有限個の場の型については) ゼロ運動量でせいぜい分岐点の特異性を持つ. 実際, この議論を逆にたどることができる. 任意の演算子は (5.1.27) のように書くことができ, クラスター分解原理は, 係数 $\mathcal{V}_{NM}$ が (5.1.28) のように単一の運動量保存デルタ関数と滑らかな係数関数の積として書けることを要求する. 任意の十分に滑らかな関数は (しかし余分なデルタ関数を含まないとすれば), (5.1.29) のように表せる.† このようにクラスター分解原理とローレンツ不変性を合わせると, 相互作用密度は消滅場と生成場から構成されねばならないという主張が自然なものになる.

† 一般の関数については指標 ℓ と ℓ' は無限の範囲を動かねばならないかもしれない. ℓ と ℓ' を有限の範囲に制限する理由は 12 章で説明するくりこみ可能性の原理と関連している.

もしクラスター分解の原理を満たすスカラー密度を構成することだけが必要なら, 不変性の条件 (5.1.10)(および適当な実条件) のみを満たす結合係数 $g_{\ell'_1\cdots\ell'_N,\,\ell_1\cdots\ell_M}$ を使って, 消滅演算子と生成演算子を組み合わせて任意の多項式 (5.1.9) を作ればよい. しかし, S 行列のローレンツ不変性のためには, 相互作用密度は交換関係 (5.1.3) も満さなければならない. この条件は生成・消滅演算子の任意の関数によって満たされるわけではない. なぜなら,

$$[\psi_\ell^+(x), \psi_{\bar\ell}^-(y)]_\mp = (2\pi)^{-3}\sum_{\sigma\,n}\int d^3p\; u_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)v_{\bar\ell}(\mathbf{p},\sigma,n)e^{ip\cdot(x-y)} \tag{5.1.30}$$

であり ($\mp$ の符号は, 成分 ψ_ℓ^+ と $\psi_{\bar\ell}^-$ により消滅および生成される粒子がボソンかフェルミオンかによって, それぞれ交換子または反交換子を表す), 一般にこれは $x-y$ が空間的な場合にさえゼロにはならないからだ. 相互作用密度を生成場のみまたは消滅場のみから作ることでこの問題を回避することは明らかに不可能だ. というのは, その場合は相互作用がエルミートになれないからだ. この困難を解決する唯一の方法は, 消滅場と生成場を組み合わせた線形結合,

$$\psi_\ell(x) \equiv \kappa_\ell\psi_\ell^+(x) + \lambda_\ell\psi_\ell^-(x) \tag{5.1.31}$$

を用いることだ. ここで定数 κ と λ および場に含まれる他の任意の定数は空間的な $x-y$ に対して,

$$[\psi_\ell(x), \psi_{\ell'}(y)]_\mp = [\psi_\ell(x), \psi_{\ell'}^\dagger(y)]_\mp = 0 \tag{5.1.32}$$

となるように調整する. 後の節で, 様々な既約的に変換する場についてこれを実行する方法を述べる. ((5.1.31) で定数 κ と λ を陽に含めたことで, 消滅場と生成場の全体のスケールを, 便利と思われる任意のやり方で自由に選べる.) ハミルトニアン密度 $\mathcal{H}(x)$ は, このような場とその共役場から構成され, かつフェルミオンを生成・消滅する任意の場の成分を偶数個含むなら, 交換関係 (5.1.3) を満たす.

条件 (5.1.32) はしばしば**因果律** (causality) の条件と呼ばれる. なぜなら, $x-y$ が空間的なら x から y へ信号が届かず, よって点 x での ψ_ℓ の測定は点 y での $\psi_{\ell'}$ あるいは $\psi^\dagger_{\ell'}$ の測定に影響を与えることはできないからだ. 因果律のそのような考察は, ボーアとローゼンフェルト[2]の古典的な論文で示されたように, 与えられた時空点でその成分の任意の一つが観測可能な電磁場についてはもっともらしい. しかし, ここでは電子のディラック場のようにいかなる意味でも観測可能には思えない場も取り扱っている. (5.1.32) は S 行列のローレンツ不変性にとって必要であり, それは測定可能性や因果律に関する付加的な仮定なしでのことだというのが, ここでの観点だ.

(5.1.32) を満たす場 (5.1.31) を構成するのに障害が一つある. これらの場によって消滅・生成させられる粒子は, 電荷のような一つ以上のゼロでない値の保存する量子数を持っているかもしれない. 例えば, 種類 n の粒子が電荷 Q の値 $q(n)$ を持つと,

$$[Q, a(\mathbf{p},\sigma,n)] = -q(n)a(\mathbf{p},\sigma,n)\ ,$$

$$[Q, a^\dagger(\mathbf{p},\sigma,n)] = +q(n)a^\dagger(\mathbf{p},\sigma,n)$$

が成り立つ. $\mathcal{H}(x)$ が電荷の演算子 Q (または他の対称性の生成子) と交換するためには, それが, Q と簡単な交換関係,

$$[Q, \psi_\ell(x)] = -q_\ell \psi_\ell(x) \tag{5.1.33}$$

を持つ場から作られる必要がある. なぜなら, そうすれば,

$$q_{\ell_1} + q_{\ell_2} + \cdots - q_{m_1} - q_{m_2} - \cdots = 0$$

を満たす場 $\psi_{\ell_1}\psi_{\ell_2}\cdots$ とその共役場 $\psi^\dagger_{m_1}\psi^\dagger_{m_2}\cdots$ の積の和として $\mathcal{H}(x)$ を構成することにより, $\mathcal{H}(x)$ が Q と交換するようにできるからだ. さて, (5.1.33) は, 消滅場のある特定の成分 $\psi^+_\ell(x)$ について, その場に

よって消滅させられる全ての粒子の種類 n が, 同一の電荷 $q(n) = q_\ell$ を持てば, そしてそのときに限り, 満たされる. また, 生成場のある特定の成分 $\psi_\ell^-(x)$ についてその場によって生成される全ての粒子の種類 $\bar{n}$ が電荷 $q(\bar{n}) = -q_\ell$ を持つならば, そしてそのときに限り満たされる. そうした理論が電荷のような量子数を保存するためには, ゼロでない量子数を持つ粒子の種類は2重に存在しなければならない. すなわち, 消滅場の特定の成分が粒子の種類 n を消滅させるなら, 生成場の同じ成分は粒子の種類 $\bar{n}$ を生成しなければならない. この粒子の種類 $\bar{n}$ は, 粒子の種類 n の**反粒子** (antiparticle) として知られ, 全ての保存量子数が反対の値を持つ. これが反粒子の存在する理由だ.

もし表現 $D(\Lambda)$ が既約でないなら, 場の基底を適当にとることで, $D(\Lambda)$ が主要な対角成分に沿ってブロックに分解し, 異なるブロックに属する場はローレンツ変換のもとでお互いに変換し合わないようにできる. また, ローレンツ変換は粒子の種類を変えない. よって, 多くの既約成分と多くの粒子の種類を含む一つの大きな場を考えるかわりに, 今後は単一の型の粒子 (添字 n は省略して) のみを消滅させ, また対応する反粒子のみを生成し, かつローレンツ群 (それは上で述べたように空間反転を含んでいると考えてもそうでなくてもよい) のもとで既約的に変換する場のみを考える. ここで, 一般には, ある場が他の場の微分になっている場合を含めて, 多くの異なるそのような場を考えなければならないことを了解しておく. 次節では, 最初にローレンツ群の最も単純な既約表現である, スカラー, ベクトル, およびディラックのスピノル表現に属する場について, 係数関数 $u_\ell(\mathbf{p}, \sigma)$ と $v_\ell(\mathbf{p}, \sigma)$ を決定し, 定数 κ と λ の相対値を定め, 粒子と反粒子の性質の間の関係を導く. その後で, 完全に一般的な既約表現について解析を繰り返す.

場の方程式について一言述べておく. (5.1.31), (5.1.17), (5.1.18) を見れば一定の質量 m を持つ場の全ての成分はクライン・ゴルドン方

程式,

$$(\Box - m^2)\psi_\ell(x) = 0 \tag{5.1.34}$$

を満たすことがわかる. ある場は, 場の成分が独立な粒子の状態より多いか否かによって, さらに他の場の方程式を満たす. 伝統的に場の量子論ではそのような場の方程式あるいはそれを導く元になるラグランジアンから出発し, それを用いて 1 粒子の消滅・生成演算子についての場の展開を導く. この本の進め方では, まず粒子から出発し, ローレンツ不変性の指図に従って場を導き, 場の方程式はこれを構成する際の副産物としてほとんど付随的に出てくる.

* * *

ここで技術的なことを述べておかねばならない. 4.4 節で与えた定理によれば, クラスター分解原理を保証する条件は, 相互作用が生成・消滅演算子の積の和で表せ, 全ての消滅演算子が全ての生成演算子の右に来て, その係数はただ一つの運動量保存のデルタ関数を含むことだ. このため, 相互作用を「正規順序」(normal ordered) 形,

$$V = \int d^3x \ :\mathcal{F}(\psi(x), \psi^\dagger(x)): \tag{5.1.35}$$

で書くべきだ. ここでコロン (:) は, それで囲まれた表現が, (ゼロでない交換子と反交換子は無視し, フェルミオン的演算子の交換についてはマイナス符号を含めて) 全ての生成演算子は全ての消滅演算子の左に来るように書き直されることを表す. 場の交換関係または反交換関係を用いると, 場の任意のそのような正規順序関数はちょうど c 数を係数とする場の通常の積の和で書き直せる. $:\mathcal{F}:$ をこのように書き換えると, それが (5.1.32) を満たす場から構成され, フェルミオン場を偶数個だけ含むなら, 正規順序化にもかかわらず, 空間的な $x - y$ に対して $:\mathcal{F}(\psi(x), \psi^\dagger(x)):$ と $:\mathcal{F}(\psi(y), \psi^\dagger(y)):$ とが可換なことは明らかだ.

5.2　因果律を満たすスカラー場

最初に, $D(\Lambda)=1$ を持ち, ローレンツ群の全ての表現の中で最も単純な表現, すなわちスカラーとして変換する 1 成分の消滅場 $\phi^+(x)$ と生成場 $\phi^-(x)$ を考える. 回転に限れば, これはちょうど回転群のスカラー表現で, $\boldsymbol{\mathcal{J}}=0$ であり, よって (5.1.25) と (5.1.26) は $j=0$ 以外の解を持たない. この場合 $\sigma,\bar{\sigma}$ は値ゼロだけをとる. こうしてスカラー場はスピンゼロ粒子のみを記述できる. また当面, 場は 1 種類の粒子だけを記述し, 異なる反粒子を持たないと仮定すると (粒子の種類の添字 n をスピンの添字 σ と場の添字 ℓ とともに省略して), 量 $u_\ell(0\sigma n)$ と $v_\ell(0\sigma n)$ はここでは単に数 $u(0)$ と $v(0)$ だ. これらの定数がともに値 $(2m)^{-1/2}$ を持つように消滅・生成場の全体のスケールをとるのが慣習だ. すると (5.1.21) と (5.1.22) は単に,

$$u(\mathbf{p})=(2p^0)^{-1/2} \tag{5.2.1}$$

と,

$$v(\mathbf{p})=(2p^0)^{-1/2} \tag{5.2.2}$$

を与える. そして場 (5.1.17) と (5.1.18) はスカラーの場合,

$$\phi^+(x)=\int d^3p\,(2\pi)^{-3/2}(2p^0)^{-1/2}a(\mathbf{p})e^{ip\cdot x} \tag{5.2.3}$$

と,

$$\phi^-(x)=\int d^3p\,(2\pi)^{-3/2}(2p^0)^{-1/2}a^\dagger(\mathbf{p})e^{-ip\cdot x}=\phi^{+\dagger}(x) \tag{5.2.4}$$

だ.

$\phi^+(x)$ と $\phi^-(x)$ の多項式として作られたハミルトニアン密度 $\mathcal{H}(x)$ はスカラーとして変換するという条件 (5.1.9) を自動的に満たす. S 行列のローレンツ不変性のためにはもう一つの条件がある. それは, $x-y$ が空間的な距離のとき $\mathcal{H}(x)$ が $\mathcal{H}(y)$ と交換するという条件だ.

もし $\mathcal{H}(x)$ が $\phi^+(x)$ だけの多項式なら問題はない．全ての消滅演算子は交換または反交換するので，あらゆる x と y に対して，粒子がボソンかフェルミオンかに応じてそれぞれ，$\phi^+(x)$ と $\phi^+(y)$ とは交換または反交換する．

$$[\phi^+(x), \phi^+(y)]_\mp = 0\,. \tag{5.2.5}$$

よって$\phi^+(x)$ の多項式 (あるいはフェルミオンの場合には任意のそのような偶数次の多項式) として作られた任意の $\mathcal{H}(x)$ は，全ての x と y について，$\mathcal{H}(y)$ と交換する．もちろん，問題は，$\mathcal{H}(x)$ がエルミートであるにはそれが $\phi^+(x)$ だけでなく $\phi^{+\dagger}(x) = \phi^-(x)$ を含まねばならず，一般の空間的距離だけ離れたとき $\phi^+(x)$ は $\phi^-(y)$ と交換あるいは反交換しないことだ．(ボソンについては) 交換関係，または (フェルミオンについては) 反交換関係 (4.2.5) を用いると，

$$\left[\phi^+(x), \phi^-(y)\right]_\mp = \int \frac{d^3p\, d^3p'}{(2\pi)^3(2p^0\cdot 2p'^0)^{1/2}}\, e^{ip\cdot x}\, e^{-ip'\cdot y}\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$$

が得られ，それは単一の積分，

$$\left[\phi^+(x), \phi^-(y)\right]_\mp = \Delta_+(x-y)\,, \tag{5.2.6}$$

になる．ここで，Δ_+ は標準的な関数，

$$\Delta_+(x) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2p^0}\, e^{ip\cdot x} \tag{5.2.7}$$

だ．これは明白にローレンツ不変であり，よって空間的な x に対しては不変 2 乗量 $x^2 > 0$ のみに依存する．よって，座標系を

$$x^0 = 0\,,\ |\mathbf{x}| = \sqrt{x^2}$$

となるように選ぶことによって，空間的な x に対する $\Delta_+(x)$ を評価できる．そうすると (5.2.7) は，

$$\Delta_+(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{d^3p}{2\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}}\, e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}$$

$$= \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \frac{\sin(p\sqrt{x^2})}{p\sqrt{x^2}}$$

を与える. 積分変数を $u \equiv p/m$ に変更すると, これは,

$$\Delta_+(x) = \frac{m}{4\pi^2\sqrt{x^2}} \int_0^\infty \frac{u\,du}{\sqrt{u^2+1}} \sin(m\sqrt{x^2}u) \tag{5.2.8}$$

あるいは, 標準的なハンケル (Hankel) 関数で表せば,

$$\Delta_+(x) = \frac{m}{4\pi^2\sqrt{x^2}} K_1\left(m\sqrt{x^2}\right) \tag{5.2.9}$$

となる.

これはゼロではないが, どうすればよいだろうか? $\Delta_+(x)$ は, ゼロではないが $x^2 > 0$ に対して x^μ の偶関数であることがわかる. $\phi^+(x)$ だけを用いるのでなく, $\mathcal{H}(x)$ を線形結合,

$$\phi(x) \equiv \kappa\phi^+(x) + \lambda\phi^-(x)$$

から構成してみよう. すると, (5.2.6) を用いて, 空間的な $x - y$ に対して,

$$\begin{aligned}[\phi(x), \phi^\dagger(y)]_\mp &= |\kappa|^2[\phi^+(x), \phi^-(y)]_\mp + |\lambda|^2[\phi^-(x), \phi^+(y)]_\mp \\ &= (|\kappa|^2 \mp |\lambda|^2)\Delta_+(x-y)\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\phi(x), \phi(y)]_\mp &= \kappa\lambda([\phi^+(x), \phi^-(y)]_\mp + [\phi^-(x), \phi^+(y)]_\mp) \\ &= \kappa\lambda(1 \mp 1)\Delta_+(x-y)\end{aligned}$$

が得られる. これらは, 粒子がボソンで (すなわち適合するのは複号の上側だ)κ と λ の大きさが,

$$|\kappa| = |\lambda|$$

と等しいなら, そしてそのときに限り, 両方ともゼロになる. 状態の位相を $a(\mathbf{p}) \to e^{i\alpha}a(\mathbf{p})$, $a^\dagger(\mathbf{p}) \to e^{-i\alpha}a^\dagger(\mathbf{p})$, よって $\kappa \to \kappa e^{i\alpha}$, $\lambda \to \lambda e^{-i\alpha}$

と再定義することで, κ と λ の相対的位相を変えることができる. こうして $\alpha = \frac{1}{2}\mathrm{Arg}(\lambda/\kappa)$ ととれば, κ と λ の位相を等しくでき, よって κ と λ を等しくできる.

$\phi(x)$ を再定義して全体にかかる因子 $\kappa = \lambda$ を吸収すれば,

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^{+\dagger}(x) = \phi^\dagger(x) \tag{5.2.10}$$

が得られる. 相互作用密度 $\mathcal{H}(x)$ は, 自己共役スカラー場 $\phi(x)$ の正規順序多項式になっていれば, 空間的な距離 $x-y$ だけ離れた $\mathcal{H}(y)$ と交換する.

(5.2.10) の二つの項の相対位相をどう選ぶかは慣習の問題だが, その慣習は一度採用すれば, この粒子に対するスカラー場が相互作用ハミルトニアン密度の中に現れるときには, 常に使わねばならない. 例えば, 相互作用密度が場 (5.2.10) ばかりでなく, α を任意の位相とする同じ粒子に対する別のスカラー場

$$\tilde{\phi}(x) = e^{i\alpha}\phi^+(x) + e^{-i\alpha}\phi^{+\dagger}(x)$$

を含むとしよう. この $\tilde{\phi}$ は, ϕ 同様, $x-y$ が空間的なとき $\tilde{\phi}(x)$ が $\tilde{\phi}(y)$ と交換するという意味で, 因果律を満たしている. しかし $\tilde{\phi}(x)$ は空間的な距離にある $\phi(y)$ とは交換しないので, 同じ理論にこれら二つの場を両方とも用いることはできない.

もし $\phi(x)$ により消滅・生成する粒子が電荷のような保存する量子数を持っているなら, $\mathcal{H}(x)$ の各項が演算子 $a(\mathbf{p})$ と $a(\mathbf{p})^\dagger$ を等しい数だけ含むときに限り $\mathcal{H}(x)$ は量子数を保存する. しかしこれは, $\mathcal{H}(x)$ が $\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^{+\dagger}(x)$ の多項式として作られているなら不可能だ. 別の言い方をすれば, $\mathcal{H}(x)$ が電荷 (あるいは他の対称性の生成子) の演算子 Q と交換するためには, Q との交換関係が単純な場から $\mathcal{H}(x)$ が作られている必要がある. これは $\phi^+(x)$ およびその共役場につい

ては,

$$[Q, \phi^{+}(x)]_{-} = -q\phi^{+}(x) ,$$
$$[Q, \phi^{+\dagger}(x)]_{-} = +q\phi^{+\dagger}(x)$$

と正しいが, 自己共役場 (5.2.8) については正しくない.

この問題を取り扱うためには, 等しい質量 m を持つが電荷はそれぞれ $+q$ と $-q$ の2個のスピンゼロのボソンが存在すると考えなければならない. $\phi^{+}(x)$ と $\phi^{+c}(x)$ がこれら二つの粒子の消滅場を表し,*

$$[Q, \phi^{+}(x)]_{-} = -q\phi^{+}(x) ,$$
$$[Q, \phi^{+c}(x)]_{-} = +q\phi^{+c}(x)$$

となるとしよう. $\phi(x)$ を線形結合,

$$\phi(x) = \kappa\phi^{+}(x) + \lambda\phi^{+c\dagger}(x)$$

と定義すると, それは明らかに単独の $\phi^{+}(x)$ と同じ交換関係,

$$[Q, \phi(x)]_{-} = -q\phi(x)$$

を持つ. すると $\phi(x)$ とその共役場の交換子または反交換子は空間的な距離では,

$$[\phi(x), \phi^{\dagger}(y)]_{\mp} = |\kappa|^2[\phi^{+}(x), \phi^{+\dagger}(y)] + |\lambda|^2[\phi^{+c\dagger}(x), \phi^{+c}(y)]_{\mp}$$
$$= (|\kappa|^2 \mp |\lambda|^2)\Delta_{+}(x-y)$$

となる. 一方, ϕ^{+} と $\phi^{+c\dagger}$ は異なる粒子を消滅・生成するので, $\phi(x)$ と $\phi(y)$ は全ての x と y に対してお互いと自動的に交換または反交換する. この結果を導く際に粒子と反粒子は同じ質量を持ち, よって

*添字「c」は「荷電共役」を表す. 保存量子数を持たない粒子は自分自身の反粒子すなわち $a^{c}(\mathbf{p}) = a(\mathbf{p})$ であっても, そうでなくてもよい.

交換子または反交換子は同じ関数 $\Delta_+(x-y)$ を含むことを暗黙に仮定した. フェルミ統計はここでも再び排除される. なぜなら, $\phi(x)$ が $\phi^\dagger(y)$ と空間的な距離で反交換することは $\kappa=\lambda=0$ でなければ不可能であり, その場合は場が単に消えてしまうからだ. よってスピンのない粒子はボソンでなければならない.

ボース統計の場合には, 複素場 $\phi(x)$ が $\phi^\dagger(y)$ と空間的距離で交換するには, 粒子と反粒子が等しい質量を持つとともに, $|\kappa|^2=|\lambda|^2$ となることが必要十分だ. これら二つの粒子の状態の相対位相を再定義することにより, 前と同様に κ と λ に同じ位相を持たせることができ, その場合 $\kappa=\lambda$ だ. この共通因子は場 ϕ の再定義により取り除くことができ,

$$\phi(x)=\phi^+(x)+\phi^{c+\dagger}(x)\ ,$$

あるいはより詳細には,

$$\phi(x)=\int\frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2}(2p^0)^{1/2}}\left[a(\mathbf{p})e^{ip\cdot x}+a^{c\dagger}(\mathbf{p})e^{-ip\cdot x}\right] \tag{5.2.11}$$

となる. これが因果律を満たす実質的に唯一のスカラー場だ. この式は, 自分自身の反粒子である純粋に中性なスピンゼロ粒子 (その場合は $a^c(\mathbf{p})=a(\mathbf{p})$) についても, 反粒子が自分とは異なっている粒子 (その場合は $a^c(\mathbf{p})\neq a(\mathbf{p})$) についても両方に使える.

後で使うために, ここで, 複素スカラー場とその共役場の交換子は,

$$[\phi(x),\phi^\dagger(y)]=\Delta(x-y) \tag{5.2.12}$$

であることを注意しておく. ただし,

$$\Delta(x-y)\equiv\Delta_+(x-y)-\Delta_+(y-x)=\int\frac{d^3p}{2p^0(2\pi)^3}[e^{ip\cdot(x-y)}-e^{-ip\cdot(x-y)}] \tag{5.2.13}$$

だ.

次にこの場に様々な反転対称変換を施した場合の効果を考察しよう．まず, 4.2 節の結果から, 消滅・生成演算子の空間反転の効果は**, η と η^c をそれぞれ粒子と反粒子の固有パリティとして,

$$\mathsf{P}a(\mathbf{p})\mathsf{P}^{-1} = \eta^* a(-\mathbf{p})\,, \tag{5.2.14}$$

$$\mathsf{P}a^{c\dagger}(\mathbf{p})\mathsf{P}^{-1} = \eta^c a^{c\dagger}(-\mathbf{p}) \tag{5.2.15}$$

であることが容易にわかる．これらの結果を消滅場 (5.2.3) と生成場 (5.2.4) の荷電共役場に適用し, 積分変数を $\mathbf{p}$ から $-\mathbf{p}$ に変更すると, 以前のように $\mathcal{P}x = (-\mathbf{x}, x^0)$ として,

$$\mathsf{P}\phi^+(x)\mathsf{P}^{-1} = \eta^*\phi^+(\mathcal{P}x)\,, \tag{5.2.16}$$

$$\mathsf{P}\phi^{+c\dagger}(x)\mathsf{P}^{-1} = \eta^c\phi^{+c\dagger}(\mathcal{P}x) \tag{5.2.17}$$

が得られる．一般にスカラー場 $\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^{+c\dagger}(x)$ に空間反転を施すと, 異なる場 $\phi_P = \eta^*\phi^+ + \eta^c\phi^{+c\dagger}$ が得られる．両方の場は個別に因果律を満たす．しかし, もし ϕ と $\phi_P^\dagger$ が同じ相互作用に現れると, 一般に両者は空間的距離で交換しないので問題が起こる．ローレンツ不変性をパリティ保存および相互作用のエルミート性とともに保持する唯一の方法は, ϕ_P が ϕ に比例する, つまり,

$$\eta^c = \eta^* \tag{5.2.18}$$

を要求することだ．すなわち, スピンゼロ粒子とその反粒子を 1 個づつ含む状態の固有パリティ $\eta\eta^c$ は偶でなければならない．すると単に,

$$\mathsf{P}\phi(x)\mathsf{P}^{-1} = \eta^*\phi(\mathcal{P}x) \tag{5.2.19}$$

**反転演算子 P, C, T の下付き添字 0 は省略している．なぜなら, これらの反転が良い対称性になっている実際上全ての場合に, 同じ演算子が「in」状態,「out」状態および自由粒子状態に反転変換を引き起こすからだ．

となる．これらの結果はまたスピンゼロ粒子が自分自身の反粒子のときにも成り立つ．その場合は $\eta^c = \eta$ であり，そのような粒子の固有パリティは実で $\eta = \pm 1$ であることを意味する．

荷電共役もほぼ同様に取り扱える．4.2 節の結果から，1 粒子状態に荷電共役の演算を施したとき現れる位相を ξ および ξ^c として，

$$\mathsf{C}a(\mathbf{p})\mathsf{C}^{-1} = \xi^* a^c(\mathbf{p})\,, \tag{5.2.20}$$

$$\mathsf{C}a^{c\dagger}(\mathbf{p})\mathsf{C}^{-1} = \xi^c a^\dagger(\mathbf{p}) \tag{5.2.21}$$

だ．すると，

$$\mathsf{C}\phi^+(x)\mathsf{C}^{-1} = \xi^* \phi^{+c}(x)\,, \tag{5.2.22}$$

$$\mathsf{C}\phi^{+c\dagger}(x)\mathsf{C}^{-1} = \xi^c \phi^{+\dagger}(x) \tag{5.2.23}$$

となる．$\mathsf{C}\phi(x)\mathsf{C}^{-1}$ が，空間的距離で交換する場 $\phi^\dagger(x)$ に比例するためには明らかに，

$$\xi^c = \xi^* \tag{5.2.24}$$

が必要だ．通常のパリティと全く同様に，スピンゼロ粒子とその反粒子 1 個ずつから成る状態の固有荷電共役パリティ $\xi\xi^c$ は偶だ．よって単に，

$$\mathsf{C}\phi(x)\mathsf{C}^{-1} = \xi^* \phi^\dagger(x) \tag{5.2.25}$$

になる．再びこれらの結果は粒子が自分自身の反粒子であり $\xi^c = \xi$ の場合にも成り立つ．この場合荷電共役パリティは通常のパリティと同様に実で，$\xi = \pm 1$ でなければならない．

最後に時間反転に移る．4.2 節から，

$$\mathsf{T}a(\mathbf{p})\mathsf{T}^{-1} = \zeta^* a(-\mathbf{p})\,, \tag{5.2.26}$$

$$\mathsf{T}a^{c\dagger}(\mathbf{p})\mathsf{T}^{-1} = \zeta^c a^{c\dagger}(-\mathbf{p}) \tag{5.2.27}$$

だ. T が反ユニタリーであることを思い出し, 再び積分変数を $\mathbf{p}$ から $-\mathbf{p}$ に変えれば,

$$\mathsf{T}\phi^{+}(x)\mathsf{T}^{-1} = \zeta^{*}\phi^{+}(-\mathcal{P}x) \tag{5.2.28}$$

$$\mathsf{T}\phi^{+c\dagger}(x)\mathsf{T}^{-1} = \zeta^{c}\phi^{+c\dagger}(-\mathcal{P}x) \tag{5.2.29}$$

がわかる. $\mathsf{T}\phi(x)\mathsf{T}^{-1}$ が時間反転した点 $-\mathcal{P}x$ での場 ϕ と単純な関係になっているためには,

$$\zeta^{c} = \zeta^{*} \tag{5.2.30}$$

でなければならない. そうすると,

$$\mathsf{T}\phi(x)\mathsf{T}^{-1} = \zeta^{*}\phi(-\mathcal{P}x) \tag{5.2.31}$$

となる.

5.3　因果律を満たすベクトル場

今度はその次に簡単な種類の場を取り上げる. それは斉次ローレンツ群の自明でない表現のうち最も簡単な 4 元ベクトルとして変換する場だ. その例として質量がゼロでない粒子 $W^{\pm}$ と Z^{0} がある. これらの粒子は低エネルギーではそのような場で記述され, 最新の素粒子物理においてますます大きな役割を果たしている. よってこの例は単に教育的に興味があるだけではない. (また, ここでは質量がゼロでない粒子のみを考えているが, 量子電磁理論を研究する一つの方法は, 光子を, 質量のあるベクトル場でその質量が極めて小さくなった極限として記述することだ.) しばらくの間, この場により 1 種類の粒子だけを (種類の添字 n を省略して) 記述するとするが, その際場は粒子およびそれと異なる反粒子の両方を記述する可能性を考察する.

ローレンツ群の 4 元ベクトル表現では, 表現行列 $D(\Lambda)$ の行と列は 4 成分の指標 μ, ν 等の添字を持ち,

$$D(\Lambda)^{\mu}{}_{\nu} \equiv \Lambda^{\mu}{}_{\nu} \tag{5.3.1}$$

だ. ベクトル場の消滅部分と生成部分は,

$$\phi^{+\mu}(x) = \sum_\sigma (2\pi)^{-3/2} \int d^3p\, u^\mu(\mathbf{p},\sigma)\, a(\mathbf{p},\sigma)\, e^{ip\cdot x}\ , \tag{5.3.2}$$

$$\phi^{-\mu}(x) = \sum_\sigma (2\pi)^{-3/2} \int d^3p\, v^\mu(\mathbf{p},\sigma)\, a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)\, e^{-ip\cdot x} \tag{5.3.3}$$

と書かれる. 任意の運動量に対する係数関数 $u^\mu(\mathbf{p},\sigma)$ と $v^\mu(\mathbf{p},\sigma)$ は (5.1.21) と (5.1.22) よりゼロ運動量での係数関数を用いて与えられ, それは今度は,

$$u^\mu(\mathbf{p},\sigma) = (m/p^0)^{1/2} L(p)^\mu{}_\nu u^\nu(0,\sigma)\ , \tag{5.3.4}$$

$$v^\mu(\mathbf{p},\sigma) = (m/p^0)^{1/2} L(p)^\mu{}_\nu v^\nu(0,\sigma) \tag{5.3.5}$$

となる. (時空の指標 μ, ν 等については通常の和の記法を用いている.) また, ゼロ運動量での係数関数は条件 (5.1.25) と (5.1.26), すなわち,

$$\sum_{\bar\sigma} u^\mu(0,\bar\sigma)\mathbf{J}^{(j)}_{\bar\sigma\sigma} = \boldsymbol{\mathcal{J}}^\mu{}_\nu u^\nu(0,\sigma) \tag{5.3.6}$$

と,

$$-\sum_{\bar\sigma} v^\mu(0,\bar\sigma)\mathbf{J}^{(j)*}_{\bar\sigma\sigma} = \boldsymbol{\mathcal{J}}^\mu{}_\nu v^\nu(0,\sigma) \tag{5.3.7}$$

に従う. 4 元ベクトル表現における回転の生成子 $\boldsymbol{\mathcal{J}}^\mu{}_\nu$ は (5.3.1) より,

$$(\mathcal{J}_k)^0{}_0 = (\mathcal{J}_k)^0{}_i = (\mathcal{J}_k)^i{}_0 = 0\ , \tag{5.3.8}$$

$$(\mathcal{J}_k)^i{}_j = -i\epsilon_{ijk} \tag{5.3.9}$$

と与えられる. ここで i, j, k は 1, 2, 3 の範囲の値をとる. 特に $\boldsymbol{\mathcal{J}}^2$ は,

$$(\boldsymbol{\mathcal{J}}^2)^0{}_0 = (\boldsymbol{\mathcal{J}}^2)^0{}_i = (\boldsymbol{\mathcal{J}}^2)^i{}_0 = 0\ , \tag{5.3.10}$$

$$(\boldsymbol{\mathcal{J}}^2)^i{}_j = 2\delta^i{}_j \tag{5.3.11}$$

の形をとる. すると (5.3.6) と (5.3.7) から,

$$\sum_{\bar{\sigma}} u^0(0,\bar{\sigma})(\mathbf{J}^{(j)})^2_{\bar{\sigma}\sigma} = 0 \, , \tag{5.3.12}$$

$$\sum_{\bar{\sigma}} u^i(0,\bar{\sigma})(\mathbf{J}^{(j)})^2_{\bar{\sigma}\sigma} = 2u^i(0,\sigma), \tag{5.3.13}$$

および,

$$\sum_{\bar{\sigma}} v^0(0,\bar{\sigma})(\mathbf{J}^{(j)*})^2_{\bar{\sigma}\sigma} = 0 \, , \tag{5.3.14}$$

$$\sum_{\bar{\sigma}} v^i(0,\bar{\sigma})(\mathbf{J}^{(j)*})^2_{\bar{\sigma}\sigma} = 2v^i(0,\sigma) \tag{5.3.15}$$

が導かれる. また, よく知られた結果 $(\mathbf{J}^{(j)})^2_{\bar{\sigma}\sigma} = j(j+1)\delta_{\bar{\sigma}\sigma}$ を思い出そう. (5.3.12)–(5.3.15) からベクトル場で記述される粒子のスピンには二つの可能性だけがあることがわかる. すなわち, $j=0$ か, さもなければ, $j=1$ (よって $j(j+1)=2$) のどちらかだ. 前者の場合, $\mathbf{p}=0$ では u^0 と v^0 だけがゼロでない. また, 後者の場合, $\mathbf{p}=0$ では空間成分 u^i と v^i のみがゼロでない. これら二つの可能性のそれぞれをもう少し詳細に見てみよう.

スピンゼロ

場の規格化を適当に選ぶことで, ゼロでない唯一の成分 $u^\mu(0)$ と $v^\mu(0)$ が, 従来使われてきた値,

$$u^0(0) = i(m/2)^{1/2} \, ,$$
$$v^0(0) = -i(m/2)^{1/2}$$

を持つようにできる. (添字 σ はここでは唯一の値ゼロをとるので省略する.) すると (5.3.4) と (5.3.5) より一般の運動量について,

$$u^\mu(\mathbf{p}) = ip^\mu(2p^0)^{-1/2} \tag{5.3.16}$$

と,

$$v^{\mu}(\mathbf{p}) = -ip^{\mu}(2p^0)^{-1/2} \tag{5.3.17}$$

を得る. このベクトル消滅・生成場は, 前節で定義されたスピンゼロ粒子のスカラー消滅・生成場 $\phi^{\pm}$ の微分, すなわち,

$$\phi^{+\mu}(x) = \partial^{\mu}\phi^{+}(x) \qquad \phi^{-\mu}(x) = \partial^{\mu}\phi^{-}(x) \tag{5.3.18}$$

に他ならない. スピンゼロ粒子に対する因果律を満たすベクトル場もまた, ちょうど因果律を満たすスカラー場の微分,

$$\phi^{\mu}(x) = \phi^{+\mu}(x) + \phi^{-\mu}(x) = \partial^{\mu}\phi(x) \tag{5.3.19}$$

であることは明らかだ. よってこの場合についてこれ以上調べる必要は無い.

スピン 1

(5.3.6) と (5.3.7) から, ただちに $\sigma = 0$ の場合のベクトル $u^i(0,0)$ と $v^i(0,0)$ が 3 軸方向を向いていることがわかる. 4 元ベクトルの成分は常に 1, 2, 3, 0 の順に並べることにして, 場の適当な規格化によって, これらのベクトルが値,

$$u^{\mu}(0,0) = v^{\mu}(0,0) = (2m)^{-1/2}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.3.20}$$

を持つようにできる. 他の成分を知るために (5.3.6), (5.3.7), (5.3.9) を用いて昇降演算子 $J_1^{(1)} \pm iJ_2^{(1)}$ の u と v に対する効果を計算する. これは,

$$u^{\mu}(0,+1) = -v^{\mu}(0,-1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(2m)^{-1/2}\begin{bmatrix} 1 \\ +i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{5.3.21}$$

$$u^\mu(0,-1) = -v^\mu(0,+1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(2m)^{-1/2}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.3.22}$$

を与える. (5.3.4) と (5.3.5) を適用して今度は,

$$u^\mu(\mathbf{p},\sigma) = v^{\mu *}(\mathbf{p},\sigma) = (2p^0)^{-1/2} e^\mu(\mathbf{p},\sigma) \tag{5.3.23}$$

を得る. ここで,

$$e^\mu(\mathbf{p},\sigma) \equiv L^\mu{}_\nu(\mathbf{p}) e^\nu(0,\sigma) \tag{5.3.24}$$

また,

$$e^\mu(0,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e^\mu(0,+1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ +i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$e^\mu(0,-1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.3.25}$$

となる. 消滅・生成場 (5.3.2) と (5.3.3) はここでは,

$$\phi^{+\mu}(x) = \phi^{-\mu\dagger}(x) = (2\pi)^{-3/2}\sum_\sigma \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}}\, e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\, a(\mathbf{p},\sigma)\, e^{ip\cdot x} \tag{5.3.26}$$

だ. 場 $\phi^{+\mu}(x)$ と $\phi^{+\nu}(y)$ はもちろん全ての x と y について交換 (または反交換) するが, $\phi^{+\mu}(x)$ と $\phi^{-\nu}(y)$ はそうはならない. それらの (ボソンの場合の) 交換子または (フェルミオンの場合の) 反交換子は,

$$[\phi^{+\mu}(x), \phi^{-\nu}(y)]_\mp = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p^0}\, e^{ip\cdot(x-y)}\, \Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p}) \tag{5.3.27}$$

だ. ここで,

$$\Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p}) \equiv \sum_{\sigma} e^{\mu}(\mathbf{p},\sigma)e^{\nu *}(\mathbf{p},\sigma) \tag{5.3.28}$$

だ. (5.3.25) を用いた簡単な計算により, $\Pi^{\mu\nu}(0)$ は時間方向と垂直な空間への射影行列であることが示される. また (5.3.24) より $\Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p})$ は 4 元ベクトル p^{μ} に垂直な空間への射影行列,

$$\Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p}) = \eta^{\mu\nu} + p^{\mu}p^{\nu}/m^2 \tag{5.3.29}$$

であることがわかる. すると交換子 (あるいは反交換子)(5.3.27) は前節で定義した Δ_+ 関数を用いて,

$$[\phi^{+\mu}(x), \phi^{-\nu}(y)]_{\mp} = \left[\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^{\mu}\partial^{\nu}}{m^2}\right]\Delta_+(x-y) \tag{5.3.30}$$

と書ける. 当面の目的にとってこの表現で重要なことは, 空間的な $x-y$ に対してそれがゼロにならず $x-y$ について偶関数であることだ. よって前節で因果律を満たす場を構成しようとした際の理由付けを繰り返すことができる. すなわち, 消滅場と生成場の線形結合,

$$v^{\mu}(x) \equiv \kappa\phi^{+\mu}(x) + \lambda\phi^{-\mu}(x)$$

を作ると, 空間的な $x-y$ に対して,

$$[v^{\mu}(x), v^{\nu}(y)]_{\mp} = \kappa\lambda\,[1\mp 1]\left[\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^{\mu}\partial^{\nu}}{m^2}\right]\Delta_+(x-y)$$

および,

$$[v^{\mu}(x), v^{\nu\dagger}(y)]_{\mp} = (|\kappa|^2 \mp |\lambda|^2)\left[\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^{\mu}\partial^{\nu}}{m^2}\right]\Delta_+(x-y)$$

となる. 空間的な $x-y$ に対してこの両方がゼロになるためには, スピン 1 粒子がボソンでかつ $|\kappa| = |\lambda|$ であることが必要十分だ. 1 粒子状態の位相を適当に選べば, κ と λ に同位相を与えて $\kappa = \lambda$ とできる. すると場全体の規格化を再定義して共通因子 κ を落とすことがで

きる. 最終的に, 質量を持つスピン 1 粒子に対する因果律を満たすベクトル場は,

$$v^\mu(x) = \phi^{+\mu}(x) + \phi^{+\mu\dagger}(x) \tag{5.3.31}$$

であることがわかる. この場は実, すなわち,

$$v^\mu(x) = v^{\mu\dagger}(x) \tag{5.3.32}$$

であることに留意しよう. しかし, その場が記述する粒子がある保存量子数 Q のゼロでない値を持つなら, そのような実の場から Q を保存する相互作用を構成することはできない. そのかわり, 同じ質量とスピンを持ち逆符号の Q の値を持つ別のボソンが存在すると考え, 因果律を満たす場を,

$$v^\mu(x) = \phi^{+\mu}(x) + \phi^{+c\mu\dagger}(x) \tag{5.3.33}$$

あるいはより詳細に書くと,

$$\begin{aligned} v^\mu(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_\sigma \int \frac{d^3p}{\sqrt{2p^0}} \\ \times \left[e^\mu(\mathbf{p},\sigma)a(\mathbf{p},\sigma)e^{ip\cdot x} + e^{\mu *}(\mathbf{p},\sigma)a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma)e^{-ip\cdot x}\right] \end{aligned} \tag{5.3.34}$$

と構成しなければならない. ここで, 上付き添字 c は反粒子を生成する演算子を表すが, その反粒子とは $\phi^{+\mu}(x)$ により消滅させられる粒子の荷電共役粒子だ. これは因果律を満たす場であるが, もはや実ではない. この式はまた, 単に $a^c(\mathbf{p}) = a(\mathbf{p})$ とおけば, 自分自身の反粒子である純粋に中性のスピン 1 粒子についても使える. いずれの場合も, ベクトル場とその共役場の交換子は, (5.2.13) の $\Delta(x-y)$ を使って,

$$[v^\mu(x), v^{\nu\dagger}(y)] = \left[\eta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu\partial^\nu}{m^2}\right]\Delta(x-y) \tag{5.3.35}$$

となる.

質量がゼロでないスピン 1 粒子について上で構成した実場および複素場は興味深い場の方程式を満たす. まず, (5.3.26) の指数関数に現れる p^μ は $p^2 = -m^2$ を満たすので, この場はスカラー場と全く同様にクライン・ゴルドン方程式,

$$(\Box - m^2)v^\mu(x) = 0 \tag{5.3.36}$$

を満たす. 加えて, (5.3.24) は,

$$e^\mu(\mathbf{p},\sigma)\,p_\mu = 0 \tag{5.3.37}$$

であることを示しているので, この場はもう一つの方程式,

$$\partial_\mu v^\mu(x) = 0 \tag{5.3.38}$$

を満たす. 質量が小さい極限で (5.3.36) と (5.3.38) はちょうど電磁理論のローレンツゲージと呼ばれるゲージでの 4 元ベクトルポテンシャルに対する方程式だ.

しかし, 質量がゼロでないスピン 1 粒子のどのような理論からでも, その質量をゼロにすることによって, 電磁理論を得れるわけではない. 問題点は, J_μ を任意の 4 元ベクトルカレントとして, 相互作用密度 $\mathcal{H} = J_\mu v^\mu$ によるスピン 1 粒子の生成率を考察すればわかる. 行列要素を 2 乗し, スピン 1 粒子のスピンの z 成分についての和をとると,

$$\sum_\sigma |< J_\mu > e^\mu(\mathbf{p},\sigma)^*|^2 =< J_\mu >< J_\nu >^* \Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p})$$

に比例する生成率が得られる. ここで, $\mathbf{p}$ は放出されたスピン 1 粒子の運動量で, $< J_\mu >$ は (例えば $x = 0$ における) カレントを他の全ての粒子の始状態と終状態ではさんだ行列要素だ. $\Pi^{\mu\nu}(\mathbf{p})$ の項 $p^\mu p^\nu/m^2$ のために $m \to 0$ ととったとき一般に放出率は無限大になってしまう. この破局を避ける唯一の方法は $< J_\mu > p^\mu$ がゼロになると考えるこ

とだ. それは, 座標空間ではちょうど $\partial_\mu J^\mu = 0$ の意味でカレント J^μ が保存しなければならないということだ. 実際, カレントの保存の必要性は単に状態の数を数えるだけでもわかる. 質量がゼロでないスピン 1 粒子は 3 個のスピン状態を持ち, それらはヘリシティ +1, 0, −1 を持つ状態にとれる. 一方光子のような質量ゼロのスピン 1 粒子はヘリシティ +1 と −1 しか持てない. すなわちカレント保存の条件は, ちょうどスピン 1 粒子のヘリシティ 0 状態が質量ゼロの極限で放出されないことを保証する.

種々の反転は, 前節で議論したスカラー場とほとんど同じ様に扱える. 空間反転を調べるには, $e^\mu(-\mathbf{p},\sigma)$ についての式が必要だ. $L^\mu{}_\nu(-\mathbf{p}) = \mathcal{P}^\mu{}_\rho L^\rho{}_\tau(\mathbf{p})\mathcal{P}^\tau{}_\nu$ と (5.3.24) を用いると,

$$e^\mu(-\mathbf{p},\sigma) = -\mathcal{P}^\mu{}_\nu e^\nu(\mathbf{p},\sigma) \tag{5.3.39}$$

を得る. また, 時間反転については $(-1)^{1+\sigma}e^{\mu*}(-\mathbf{p},-\sigma)$ に関する式が必要だ. $(-1)^{1+\sigma}e^{\mu\,*}(0,-\sigma) = -e^\mu(0,\sigma)$ と $L^\mu{}_\nu(-\mathbf{p})$ についての上記の式を用いると,

$$(-1)^{1+\sigma}e^{\mu*}(-\mathbf{p},-\sigma) = \mathcal{P}^\mu{}_\nu\, e^\nu(\mathbf{p},\sigma) \tag{5.3.40}$$

を得る. これらの結果および 4.2 節で与えた消滅・生成演算子の変換性を用いて, 消滅・生成場の反転のもとでの変換性を導くのは容易だ. 前と同様に, 因果律を満たす場が空間的な距離でそれと交換する他の場に変換するには, スピン 1 粒子とその反粒子の固有空間反転, 荷電共役, 時間反転の各位相が,

$$\eta^{\mathrm{c}} = \eta^* \,, \tag{5.3.41}$$

$$\xi^{\mathrm{c}} = \xi^* \,, \tag{5.3.42}$$

$$\zeta^{\mathrm{c}} = \zeta^* \tag{5.3.43}$$

で関連している必要がある. (特にスピン 1 粒子が自分自身の反粒子であるなら全ての位相は実数でなければならない.) これらの位相の条件が満たされていれば, 因果律を満たすベクトル場 (5.3.34) は反転変換性,

$$\mathsf{P}v^\mu(x)\mathsf{P}^{-1} = -\eta^*\mathcal{P}^\mu{}_\nu v^\nu(\mathcal{P}x)\ , \tag{5.3.44}$$

$$\mathsf{C}v^\mu(x)\mathsf{C}^{-1} = \xi^* v^{\mu\dagger}(x)\ , \tag{5.3.45}$$

$$\mathsf{T}v^\mu(x)\mathsf{T}^{-1} = \zeta^*\mathcal{P}^\mu{}_\nu v^\nu(-\mathcal{P}x) \tag{5.3.46}$$

を持つ. 特に, (5.3.44) の負符号より, 極性ベクトルとして変換するベクトル場は, 行列 $\mathcal{P}^\mu{}_\nu$ にともなう余分な位相や符号を除いて固有パリティ $\eta = -1$ を持つスピン 1 粒子を記述することがわかる.

5.4 ディラック形式

斉次ローレンツ群のあらゆる表現の中で, 物理で特別な役割を果たしている表現が一つある. 1.1 節で見たように, この表現はディラック [3]によって電子の理論に導入された. しかしよくあることだが, それはすでに数学者[4]には知られていた. なぜなら, それは任意の次元での回転群またはローレンツ群 (実際にはそれらの被覆群 — 2.7 節を見よ) の二つの広い部類の表現の一方の基礎を与えるからだ. 我々がここで採用している観点では, 任意の量子場の構造と性質は, その場が斉次ローレンツ群のもとで変換する際の表現に支配されているので, ディラック形式をディラックによって導入された風にではなく, むしろ最初に数学に現れたとおりに記述するのが自然であろう.

斉次ローレンツ群の表現とは, 群の乗法則,

$$D(\bar\Lambda)D(\Lambda) = D(\bar\Lambda\Lambda)$$

を満たす行列 $D(\Lambda)$ の集合を意味する．ユニタリー演算子 $U(\Lambda)$ と全く同様に，微小変換，

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu\ , \tag{5.4.1}$$

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \tag{5.4.2}$$

の場合を考察することでこれらの行列の性質を調べることができる．その場合，

$$D(\Lambda) = 1 + \frac{i}{2}\,\omega_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\mu\nu} \tag{5.4.3}$$

で，$\mathcal{J}^{\mu\nu} = -\mathcal{J}^{\nu\mu}$ は交換関係 (2.4.12)，すなわち，

$$i[\mathcal{J}^{\mu\nu}, \mathcal{J}^{\rho\sigma}] = \eta^{\nu\rho}\mathcal{J}^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\rho}\mathcal{J}^{\nu\sigma} - \eta^{\sigma\mu}\mathcal{J}^{\rho\nu} + \eta^{\sigma\nu}\mathcal{J}^{\rho\mu} \tag{5.4.4}$$

を満たす行列の集合だ．

そのような行列の集合を見つけるには，まず反交換関係，

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \tag{5.4.5}$$

を満たす行列 γ^μ を構成し，仮に，

$$\mathcal{J}^{\mu\nu} = -\frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \tag{5.4.6}$$

と定義してみよう．(5.4.5) を用いて，

$$[\mathcal{J}^{\mu\nu}, \gamma^\rho] = -i\gamma^\mu\eta^{\nu\rho} + i\gamma^\nu\eta^{\mu\rho} \tag{5.4.7}$$

を示すのは容易であり，これから (5.4.6) が確かに望みの交換関係 (5.4.4) を満たすことがわかる．さらに行列 γ_μ は既約，すなわち，これらの行列のどれによっても不変な固有部分空間はないと仮定しよう．さもなければ，(5.4.3) および (5.4.6) のように変換するもっと小さな場の成分のみを選んで，γ_μ を既約にできたはずだ．

(5.4.5)(あるいは $\eta_{\mu\nu}$ をクロネッカー・デルタで置き換えたそのユークリッド版) のような関係を満たす行列の任意の集合はクリフォード

代数 (Clifford algebra) と呼ばれる. 斉次ローレンツ群 (より正確には, その被覆群) のこの特別な表現の数学的重要性は, ローレンツ群の最も一般的な既約表現はテンソルか, (5.4.3) と (5.4.6) のように変換するスピノルか, スピノルとテンソルの直積の何れかであるという (5.6 節で示す) 事実から来ている.

交換関係 (5.4.7) は, (5.4.3) が,

$$D(\Lambda)\gamma^\rho D^{-1}(\Lambda) = \Lambda_\sigma{}^\rho \gamma^\sigma \tag{5.4.8}$$

を満たすという意味で, γ^ρ がベクトルであるという風にまとめることができる. 同じ意味で, 単位行列はスカラー,

$$D(\Lambda)\,1\,D^{-1}(\Lambda) = 1 \tag{5.4.9}$$

であることは自明であり, (5.4.4) は $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$ が反対称テンソル,

$$D(\Lambda)\mathcal{J}^{\rho\sigma}D^{-1}(\Lambda) = \Lambda_\mu{}^\rho \Lambda_\nu{}^\sigma \mathcal{J}^{\mu\nu} \tag{5.4.10}$$

であることを示している. 行列 γ^μ は他の完全反対称テンソル,

$$\mathcal{A}^{\rho\sigma\tau} \equiv \gamma^{[\rho}\gamma^\sigma\gamma^{\tau]}\,, \tag{5.4.11}$$

$$\mathcal{P}^{\rho\sigma\tau\eta} = \gamma^{[\rho}\gamma^\sigma\gamma^\tau\gamma^{\eta]} \tag{5.4.12}$$

を構成するのに使える. ここで括弧は, 括弧内の指標のあらゆる偶数回または奇数回の置換に対して, それぞれプラスまたはマイナスの符号をつけて和をとるという標準的な記法を意味している. 例えば, (5.4.11) は,

$$\mathcal{A}^{\rho\sigma\tau} \equiv \gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma^\tau - \gamma^\rho\gamma^\tau\gamma^\sigma - \gamma^\sigma\gamma^\rho\gamma^\tau + \gamma^\tau\gamma^\rho\gamma^\sigma + \gamma^\sigma\gamma^\tau\gamma^\rho - \gamma^\tau\gamma^\sigma\gamma^\rho$$

の省略表記だ. (5.4.5) を繰り返し用いて, γ の任意の積を γ の反対称化積と計量テンソルの積の和として書けるので, 完全反対称テンソル

はディラック行列から作ることのできる全ての行列の集合の完全基底をなす.

この形式は自動的にパリティ変換を含み, それは慣習的に,

$$\beta \equiv i\gamma^0 \tag{5.4.13}$$

ととられている. これをディラック行列に施すと,

$$\beta\gamma^i\beta^{-1} = -\gamma^i\,, \qquad \beta\gamma^0\beta^{-1} = +\,\gamma^0 \tag{5.4.14}$$

が得られる. (ここで添字は, μ が値 $0,1,2,\cdots$ をとるとする.) 同じ相似変換を γ 行列の任意の積に施すと, その積に含まれる空間的な添字の数が偶数か奇数かに応じて, それぞれプラスまたはマイナス符号がつくだけだ. 特に,

$$\beta\mathcal{J}^{ij}\beta^{-1} = \mathcal{J}^{ij}\,, \tag{5.4.15}$$

$$\beta\mathcal{J}^{i0}\beta^{-1} = -\mathcal{J}^{i0} \tag{5.4.16}$$

となる.

この節でこれまで説明したことは全て, 任意の時空の次元数と任意の「計量」$\eta_{\mu\nu}$ について成立する. しかし 4 次元時空では完全反対称テンソルは 4 個以上の添え字を持てないので一連のテンソル $\mathbf{1}, \gamma^\rho, \mathcal{J}^{\rho\sigma}, \mathcal{A}^{\rho\sigma\tau}, \cdots$ はテンソル (5.4.12) で終るという特別な事情がある. さらに, これらのテンソルの各々は, ローレンツとパリティの同時あるいは個別の変換のもとで異なる変換をするので, それらは全て線形独立だ.* これらのテンソルの線形独立な成分の数は $\mathbf{1}$ について 1 個, γ^ρ について 4 個, $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$ について 6 個, $\mathcal{A}^{\rho\sigma\tau}$ について 4 個 , $\mathcal{P}^{\mu\nu\rho\sigma}$ について 1 個, 全部で 16 個だ. (一般則として, n 個の添え字を持つ d

*別の見方をすれば, 2 個の行列のスカラー積をそれらの積のトレースで定義したとき, これらの行列が直交系を成すことに気付けば, それらは線形独立であることが示せる. これらの行列はどれもゼロになれない. なぜなら, これらの各テンソルの各成分は異なる γ 行列の積に比例し, そのような積の 2 乗はそれに対応する 2 乗の積に ± 1 を付けたものであり, よって ± 1 に等しいからだ.

次元の完全反対称テンソルは 2 項係数 $d!/n!(d-n)!$ に等しい個数の独立な成分を持つ.) 独立な $\nu \times \nu$ 行列の数はせいぜい ν^2 なのでそれらは少なくとも $\sqrt{16} = 4$ の行と列を持たねばならない. ディラック行列は次元数がこの最小値なので必然的に既約だ. もし可約なら, これらの行列により不変に保たれる部分空間は次元数がさらに低い表現を与えることになる. よって γ^μ を 4×4 行列にとることにする.

(より一般的には, 時空の次元が任意の偶数 d の場合, $0, 1, \cdots, d$ の添え字を持つ反対称テンソルを作ることができ, それらは全体で,

$$\sum_{n=0}^{d} \frac{d!}{n!(d-n)!} = 2^d$$

に等しい数の独立な成分を含むので, γ 行列は少なくとも $2^{d/2}$ の行と列を持たねばならない.) 次元数が奇数の空間または時空間では, n 階と $d-n$ 階の完全反対称テンソルの間には $r = 0, 1, 2, ..., d-1$ について条件,**

$$\gamma^{[\mu_1}\gamma^{\mu_2}\cdots\gamma^{\mu_r]} \propto \epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_d}\gamma_{[\mu_{r+1}}\gamma_{\mu_{r+2}}\cdots\gamma_{\mu_d]}$$

という線形の関係がある. ここで $\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_d}$ は完全反対称で, また $r=0$ のとき左辺は単位行列とする. これらの条件により独立なテンソルは 2^{d-1} 個だけあり, 少なくとも $2^{(d-1)/2}$ の次元数を持つ γ 行列が必要だ.)

さて 4 次元時空に戻って, 4×4 の γ 行列を選ぼう. 一つの非常に便利な選択肢は,

$$\gamma^0 = -i\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\gamma} = -i\begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \tag{5.4.17}$$

**この制限は, 奇数次元の時空でのローレンツ群のディラック表現に空間反転が含まれることを妨げない. なぜなら, ここでテンソル $\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_d}$ は空間座標の反転に対して偶だからだ. もし空間反転に注意を払わなければ, 偶数の時空次元でも, r 個および $d-r$ 個のディラック行列の反対称積を関係付ける上記の条件を課すことにより, 固有順時ローレンツ群の $2^{(d-1)/2}$ 次元既約表現を構成することができる. 一つの例は以下の (5.4.19) と (5.4.20) の部分行列で与えられる.

だ. ここで $\mathbf{1}$ は単位 2×2 行列, また $\boldsymbol{\sigma}$ の成分は通常のパウリ行列,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.4.18}$$

だ. (σ_i はちょうど 3 次元の γ 行列だ.) γ 行列の他の任意の既約な組は相似変換でこれらの行列と結びついていることが示せる[5]. (5.4.17) からローレンツ群の生成子 (5.4.6) を簡単に計算でき, それは,

$$\mathcal{J}^{ij} = \frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\begin{bmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{bmatrix}, \tag{5.4.19}$$

$$\mathcal{J}^{i0} = +\frac{i}{2}\begin{bmatrix} \sigma_i & 0 \\ 0 & -\sigma_i \end{bmatrix} \tag{5.4.20}$$

だ. (ここで ϵ_{ijk} は $\epsilon_{123} \equiv +1$ を満たす 3 次元完全反対称テンソルだ.) これらはブロック対角的だ. よってディラック行列は固有順時ローレンツ群の可約表現, すなわち $\mathcal{J}^{ij} = \pm i\,\epsilon_{ijk}\mathcal{J}^{k0}$ なる二つの既約表現の直和を与えることがわかる.

完全反対称テンソル (5.4.11) と (5.4.12) はもう少し簡単な形に書くのが便利だ. 行列 (5.4.12) は完全反対称テンソルなので, $\epsilon^{0123} = +1$ の完全反対称量として定義された擬テンソル $\epsilon^{\rho\sigma\tau\eta}$ に比例する. ρ, σ, τ, η をそれぞれ 0,1,2,3 におくと,

$$\mathcal{P}^{\rho\sigma\tau\eta} = 4!\, i\, \epsilon^{\rho\sigma\tau\eta}\gamma_5 \tag{5.4.21}$$

であることがわかる. ここで,

$$\gamma_5 \equiv -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{5.4.22}$$

だ. 行列 γ_5 は,

$$[\mathcal{J}^{\rho\sigma}, \gamma_5] = 0\,, \tag{5.4.23}$$

$$\beta\gamma_5\beta^{-1} = -\gamma_5 \tag{5.4.24}$$

の意味で擬スカラーだ. 同様に, $\mathcal{A}^{\rho\sigma\tau}$ はある行列 $\mathcal{A}_\eta$ と縮約した $\epsilon^{\rho\sigma\tau\eta}$ に比例しなければならない. ρ, σ, τ を今度は 0,1,2 または 0,1,3 または 0,2,3 または 1,2,3 に等しくおいて,

$$\mathcal{A}^{\rho\sigma\tau} = 3!\, i\, \epsilon^{\rho\sigma\tau\eta}\gamma_5\gamma_\eta \tag{5.4.25}$$

となることがわかる. よって 16 個の独立な 4×4 行列はスカラー 1, ベクトル γ^ρ, 反対称テンソル $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$, 「軸性」ベクトル $\gamma_5\gamma_\eta$, 擬スカラー γ_5 の各成分にとれる. 行列 γ_5 は 2 乗が単位行列,

$${\gamma_5}^2 = 1 \tag{5.4.26}$$

で, 全ての γ^μ と,

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0 \tag{5.4.27}$$

のように反交換することは容易にわかる. γ_5 という表記は特に的を得ている. というのは, 反交換関係 (5.4.26), (5.4.27) および (5.4.5) より $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3, \gamma_5$ は 5 時空次元のクリフォード代数を与えているからだ. γ 行列の 4×4 表示 (5.4.17) に対して, 行列 γ_5 は,

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5.4.28}$$

だ. この表示は $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$ と γ_5 をブロック対角型にするので便利だ. 後で見るように, この性質のために, この表示は超相対論的極限 $v \to c$ の粒子を扱う際に特に有用となる. (しかしそれは 1.1 節で説明したもともとディラックにより導入された表示ではない. なぜなら, ディラックは主として $v \ll c$ である原子内の電子に興味があり, この場合には γ_5 ではなくむしろ γ^0 が対角的な表示を採用した方がより便利だからだ.)

ここで構成した斉次ローレンツ群の表現はユニタリーではない. なぜなら, 生成子 $\mathcal{J}^{\rho\sigma}$ が全てエルミート行列で表現されているわけで

はないからだ. 特に, (5.4.17) の表示では $\mathcal{J}^{ij}$ はエルミートであるが, $\mathcal{J}^{i0}$ は反エルミートだ. そのような実条件は, (5.4.13) の行列 $\beta \equiv i\gamma^0$ を導入すれば, 明白にローレンツ不変な形で書けて便利だ. この行列は (5.4.17) の表示では,

$$\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.4.29}$$

の形をとる. (5.4.17) を見れば,

$$\beta\gamma^{\mu\dagger}\beta = -\gamma^{\mu} \tag{5.4.30}$$

がわかり, それより,

$$\beta\mathcal{J}^{\rho\sigma\dagger}\beta = \mathcal{J}^{\rho\sigma} \tag{5.4.31}$$

が得られる. よって, 行列 $D(\Lambda)$ はユニタリーではないけれども擬ユニタリー条件,

$$\beta\, D(\Lambda)^{\dagger}\beta = D(\Lambda)^{-1} \tag{5.4.32}$$

を満たす. また, γ_5 はエルミートで β と反交換するので,

$$\beta\gamma_5{}^{\dagger}\beta = -\gamma_5 \tag{5.4.33}$$

であり,

$$\beta(\gamma_5\gamma_\mu)^{\dagger}\beta = -\gamma_5\gamma_\mu \tag{5.4.34}$$

が導かれる.

ディラック行列およびそれに関連した行列はまた重要な対称性を持つ. (5.4.17) と (5.4.18) より γ_μ は $\mu = 0, 2$ について対称で $\mu = 1, 3$ について反対称なので,

$$\gamma_\mu^{\mathrm{T}} = -\mathcal{C}\gamma_\mu\mathcal{C}^{-1} \tag{5.4.35}$$

だ. ここで T は転置を表し,

$$\mathcal{C} \equiv \gamma_2\beta = -i\begin{bmatrix} \sigma_2 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 \end{bmatrix} \tag{5.4.36}$$

だ. これから直ちに,

$$\mathcal{J}_{\mu\nu}^{\mathrm{T}} = -\mathcal{C}\mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{C}^{-1} \,, \tag{5.4.37}$$

$$\gamma_5^{\mathrm{T}} = +\mathcal{C}\gamma_5\mathcal{C}^{-1} \,, \tag{5.4.38}$$

$$(\gamma_5\gamma_\mu)^{\mathrm{T}} = +\mathcal{C}\gamma_5\gamma_\mu\mathcal{C}^{-1} \tag{5.4.39}$$

が導かれる. これらの符号は次節で様々なカレントの荷電共役の性質を考察する際に重要になる. もちろん, 上記の随伴と転置の結果を組み合わせてディラック行列および関連行列の複素共役行列を以下のように得ることができる.

$$\gamma_\mu^* = \beta\mathcal{C}\gamma_\mu\mathcal{C}^{-1}\beta \,, \tag{5.4.40}$$

$$\mathcal{J}_{\mu\nu}^* = -\beta\mathcal{C}\mathcal{J}_{\mu\nu}\mathcal{C}^{-1}\beta \,, \tag{5.4.41}$$

$$\gamma_5^* = -\beta\mathcal{C}\gamma_5\mathcal{C}^{-1}\beta \,, \tag{5.4.42}$$

$$(\gamma_5\gamma_\mu)^* = -\beta\mathcal{C}\gamma_5\gamma_\mu\mathcal{C}^{-1}\beta. \tag{5.4.43}$$

5.5 因果律を満たすディラック場

さて, ローレンツ群のディラック表現に従って変換する, 粒子を消滅させ反粒子を生成する場を構成しよう. 一般にこれらは, (5.1.17) と (5.1.18) で与えられる形,

$$\psi_\ell^+(x) = (2\pi)^{-3/2}\sum_\sigma\int d^3p\; u_\ell(\mathbf{p},\sigma)e^{ip\cdot x}a(\mathbf{p},\sigma) \tag{5.5.1}$$

と,

$$\psi_\ell^{-c}(x) = (2\pi)^{-3/2}\sum_\sigma\int d^3p\; v_\ell(\mathbf{p},\sigma)e^{-ip\cdot x}a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma) \tag{5.5.2}$$

をとる. ただし粒子の種類を表す添字をここでは省略した. これらの式に現れる係数関数 $u_\ell(\mathbf{p},\sigma)$ と $v_\ell(\mathbf{p},\sigma)$ を計算するためには, まず

(5.1.25) と (5.1.26) を用いてゼロ運動量での u_ℓ と v_ℓ を見つけ, 次に (5.1.21) と (5.1.22) を適用して任意の運動量での u_ℓ と v_ℓ を計算しなければならない. ただし両式の $D_{\bar{\ell}\ell}(\Lambda)$ として, 前節で議論した斉次ローレンツ群の 4×4 ディラック表現をとる.

(5.4.19) を使うと, ゼロ運動量の条件 (5.1.25) と (5.1.26) は,

$$\sum_{\bar{\sigma}} u_{\bar{m}\pm}(0,\bar{\sigma})\mathbf{J}^{(j)}_{\bar{\sigma}\sigma} = \sum_m \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma}_{\bar{m}m} u_{m\pm}(0,\sigma)$$

および

$$-\sum_{\bar{\sigma}} v_{\bar{m}\pm}(0,\bar{\sigma})\mathbf{J}_{\bar{\sigma}\sigma}{}^{(j)*} = \sum_m \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma}_{\bar{m}m} v_{m\pm}(0,\sigma)$$

となる.* 言い換えれば, $u_{m\pm}(0,\sigma)$ と $v_{m\pm}(0,\sigma)$ を行列 $U_\pm$ と $V_\pm$ の m, σ 要素と見なすと, 行列表記で,

$$U_\pm \mathbf{J}^{(j)} = \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma} U_\pm \tag{5.5.3}$$

と,

$$-V_\pm \mathbf{J}^{(j)*} = \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\sigma} V_\pm \tag{5.5.4}$$

を得る.

さて, $(2j+1)$ 次元行列 $\mathbf{J}^{(j)}$ と $-\mathbf{J}^{(j)*}$ および 2×2 行列 $\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ は全て回転群のリー代数の既約表現を与える. シューアの補題 (Schur's lemma)[6]として知られている群論の一般的な定理によれば, $U_\pm$ や $V_\pm$ のような行列が (5.5.3) と (5.5.4) のような二つの表現を結びつけているとき, その行列はゼロになるか (ここでは興味がない可能性だ) さもなければ正方で正則でなければならない. よってディラック場はスピン $j = \frac{1}{2}$ (よって $2j+1=2$ だ) の粒子しか記述できず, 行列 $\mathbf{J}^{(1/2)}$ と $-\mathbf{J}^{(1/2)*}$ は相似変換をのぞいて行列 $\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ と同じでなければならない.

---

*ここでは粒子の種類の添字 n を省略し, 4 成分の添字 ℓ を 1 対の添字で置き換えている. その一つは二つの値をとる添字 m で, (5.4.19) と (5.4.20) の部分行列の行と列を表し, もう一つは $\pm$ の値をとる添字で, (5.4.19) と (5.4.20) の上位行列の行と列を表す.

実際, 回転の生成子の標準的な表現 (2.5.21), (2.5.22) では, $\mathbf{J}^{(1/2)} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ および$-\mathbf{J}^{(1/2)*} = \frac{1}{2}\sigma_2\boldsymbol{\sigma}\sigma_2$ だ. すると $U_\pm$ と $V_\pm\sigma_2$ は $\boldsymbol{\sigma}$ と交換しなければならず, よって,

$$u_{m,\pm}(0,\sigma) = c_\pm \delta_{m\sigma} \; , \qquad v_{m,\pm}(0,\sigma) = i d_\pm (\sigma_2)_{m\sigma} \tag{5.5.5}$$

のように単位行列に比例しなければならないことが導かれる. 言い換えれば,

$$u(0,\tfrac{1}{2}) = \begin{bmatrix} c_+ \\ 0 \\ c_- \\ 0 \end{bmatrix} , \qquad u(0,-\tfrac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ c_+ \\ 0 \\ c_- \end{bmatrix} ,$$

$$v(0,\tfrac{1}{2}) = \begin{bmatrix} 0 \\ d_+ \\ 0 \\ d_- \end{bmatrix} , \qquad v(0,-\tfrac{1}{2}) = - \begin{bmatrix} d_+ \\ 0 \\ d_- \\ 0 \end{bmatrix}$$

また, 有限運動量でのスピノルは,

$$u(\mathbf{p},\sigma) = \sqrt{m/p^0}\, D\Big(L(p)\Big) u(0,\sigma) \; , \tag{5.5.6}$$

$$v(\mathbf{p},\sigma) = \sqrt{m/p^0}\, D\Big(L(p)\Big) v(0,\sigma) \tag{5.5.7}$$

だ.

今や定数 $c_\pm$ と $d_\pm$ についての説明だけが残っている. 一般に, これらは全く任意であり, 望めば c_- と d_- あるいは c_+ と d_+ をゼロに選んで, ディラック場がゼロでない成分を 2 個だけ持つようにすることさえできる. $c_\pm$ または $d_\pm$ の相対的値について何か言える唯一の物理的原理はパリティの保存だ. 空間反転のもとで粒子消滅演算子と反粒子生成演算子は,

$$\mathsf{P} a(\mathbf{p},\sigma) \mathsf{P}^{-1} = \eta^* a(-\mathbf{p},\sigma) \; , \tag{5.5.8}$$

$$\mathsf{P}a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\mathsf{P}^{-1} = \eta^c a^{c\dagger}(-\mathbf{p},\sigma) \tag{5.5.9}$$

の変換を受け, よって,

$$\mathsf{P}\psi_\ell^+(x)\mathsf{P}^{-1} = \eta^*(2\pi)^{-3/2}\sum_\sigma\int d^3p\; u_\ell(-\mathbf{p},\sigma)e^{ip\cdot\mathcal{P}x}a(\mathbf{p},\sigma)\;, \tag{5.5.10}$$

$$\mathsf{P}\psi_\ell^{-c}(x)\mathsf{P}^{-1} = \eta^c(2\pi)^{-3/2}\sum_\sigma\int d^3p\; v_\ell(-\mathbf{p},\sigma)e^{-ip\cdot\mathcal{P}x}a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma) \tag{5.5.11}$$

となることを思いだそう. また, (5.4.16), (5.1.21), (5.1.22) より,

$$u(-\mathbf{p},\sigma) = \sqrt{m/p^0}\,\beta D(L(\mathbf{p}))\beta u(0,\sigma)\;, \tag{5.5.12}$$

$$v(-\mathbf{p},\sigma) = \sqrt{m/p^0}\,\beta D(L(\mathbf{p}))\beta v(0,\sigma) \tag{5.5.13}$$

だ. ($\beta^2 = 1$ なので, もはや β と β^{-1} を区別していない.) パリティ演算子が点 x での消滅・生成場を $\mathcal{P}x$ でのこれらの場に比例するものに変換するためには, $\beta u(0,\sigma)$ と $\beta v(0,\sigma)$ がそれぞれ,

$$\beta u(0,\sigma) = b_u u(0,\sigma)\;,\qquad \beta v(0,\sigma) = b_v v(0,\sigma) \tag{5.5.14}$$

のように $u(0,\sigma)$ と $v(0,\sigma)$ に比例する必要がある. ここで b_u と b_v は符号因子すなわち $b_u^2 = b_v^2 = 1$ だ. この場合, 場は単純な空間反転性,

$$\mathsf{P}\psi^+(x)\mathsf{P}^{-1} = \eta^* b_u\beta\psi^+(\mathcal{P}x)\;, \tag{5.5.15}$$

$$\mathsf{P}\psi^{-c}(x)\mathsf{P}^{-1} = \eta^c b_v\beta\psi^{-c}(\mathcal{P}x) \tag{5.5.16}$$

を持つ. 場の全体のスケールを調整することで, ゼロ運動量での係数関数が,

$$u(0,\tfrac{1}{2}\,) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\b_u\\0\end{bmatrix}\;,\qquad u(0,-\tfrac{1}{2}\,) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\b_u\end{bmatrix}\;, \tag{5.5.17}$$

$$v(0,\tfrac{1}{2}\,) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ b_v \end{bmatrix}, \qquad v(0,-\tfrac{1}{2}\,) = \frac{-1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ b_v \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.5.18}$$

の形を持つように選ぶことができる.

さて消滅場と生成場を, 空間的距離で自分自身およびその共役場と交換または反交換する線形結合,

$$\psi(x) = \kappa\psi^{+}(x) + \lambda\psi^{-c}(x) \tag{5.5.19}$$

にまとめてみよう. 簡単な計算により,

$$[\psi_\ell(x), \psi^\dagger_{\bar\ell}(y)]_\mp = (2\pi)^{-3}\int d^3p \\ \times [|\kappa|^2 N_{\ell\bar\ell}(\mathbf{p})e^{ip\cdot(x-y)} \mp |\lambda|^2 M_{\ell\bar\ell}(\mathbf{p})e^{-ip\cdot(x-y)}] \tag{5.5.20}$$

が得られる. ここで,

$$N_{\ell\bar\ell}(\mathbf{p}) \equiv \sum_\sigma u_\ell(\mathbf{p},\sigma)u^*_{\bar\ell}(\mathbf{p},\sigma)\ , \tag{5.5.21}$$

$$M_{\ell\bar\ell}(\mathbf{p}) \equiv \sum_\sigma v_\ell(\mathbf{p},\sigma)v^*_{\bar\ell}(\mathbf{p},\sigma) \tag{5.5.22}$$

だ. 固有値条件 (5.5.14) または陽な式 (5.5.17) と (5.5.18) を用いるとゼロ運動量で,

$$N(0) = \frac{1+b_u\beta}{2}\ , \qquad M(0) = \frac{1+b_v\beta}{2} \tag{5.5.23}$$

がわかる. すると (5.5.6) と (5.5.7) から,

$$N(\mathbf{p}) = \frac{m}{2p^0}D\Big(L(p)\Big)[1+b_u\beta]D^\dagger\Big(L(p)\Big)\ , \tag{5.5.24}$$

$$M(\mathbf{p}) = \frac{m}{2p^0}D\Big(L(p)\Big)[1+b_v\beta]D^\dagger\Big(L(p)\Big) \tag{5.5.25}$$

が得られる. 擬ユニタリー条件 (5.4.32) より,

$$D\Big(L(p)\Big)\beta D^\dagger\Big(L(p)\Big) = \beta$$

と

$$D\Big(L(p)\Big)D^\dagger\Big(L(p)\Big) = D\Big(L(p)\Big)\beta D^{-1}\Big(L(p)\Big)\beta$$

が得られる. また, $\beta = i\gamma^0$ を思い出すとローレンツ変換則 (5.4.8) を用いて,

$$D\Big(L(p)\Big)\beta D^{-1}\Big(L(p)\Big) = iL_\mu{}^0(p)\gamma^\mu = -ip_\mu\gamma^\mu/m \tag{5.5.26}$$

となる. これを合わせると,

$$N(\mathbf{p}) = \frac{1}{2p^0}[-ip^\mu\gamma_\mu + b_u m]\beta\,, \tag{5.5.27}$$

$$M(\mathbf{p}) = \frac{1}{2p^0}[-ip^\mu\gamma_\mu + b_v m]\beta \tag{5.5.28}$$

が得られる.** (5.5.20) でこれを使うと最終的に,

$$\begin{aligned}[\psi_\ell(x), \psi^\dagger_{\bar\ell}(y)]_\mp = \Big(&|\kappa|^2[-\gamma^\mu\partial_\mu + b_u m]\beta\Delta_+(x-y) \\ &\mp|\lambda|^2[-\gamma^\mu\partial_\mu + b_v m]\beta\Delta_+(y-x)\Big)_{\ell\bar\ell}\end{aligned} \tag{5.5.29}$$

となる. ここで Δ_+ は 5.2 節で導入された関数,

$$\Delta_+(x) \equiv \int \frac{d^3p}{2p^0(2\pi)^3}e^{ip\cdot x}$$

だ. 5.2 節で見たように, 空間的な $x-y$ に対して $\Delta_+(x-y)$ は $x-y$ の偶関数だ. もちろん, これはその 1 次微分が $x-y$ の奇関数であることを意味する. よって, 交換子または反交換子の微分項と非微分項の両方が空間的距離でゼロになるためには,

$$|\kappa|^2 = \mp|\lambda|^2 \tag{5.5.30}$$

** 定義によっては, 余分な因子 $\sqrt{p^0/m}$ がディラック・スピノルに含まれ, m が p^0 の代わりにスピンの和 (5.5.27) と (5.5.28) の分母に現れることがある. ここで用いている規格化の慣習は $m=0$ の場合に滑らかに移行するという利点がある.

と,

$$|\kappa|^2 b_u = \pm|\lambda|^2 b_v \tag{5.5.31}$$

が必要十分だ. 明らかに (5.5.30) は下側の符号 $\mp = +$ を選ぶときだけ可能だ. すなわち, ディラック場によって記述される粒子はフェルミオンでなければならない. すると, $|\kappa|^2 = |\lambda|^2$ および $b_u = -b_v$ も必要だ. スカラーの場合と全く同様に, 生成・消滅演算子の相対的位相を再定義して比 κ/λ を実数にする自由度があり, その場合, $\kappa = \lambda$ であり, 場 ψ の全体のスケールと位相を調節して,

$$\kappa = \lambda = 1 \tag{5.5.32}$$

としてよい. 最後に, もし望めば, ψ を $\gamma_5\psi$ で置き換えることができ, そうすると b_u と b_v の両方の符号が変わり, よって常に,

$$b_u = -b_v = +1 \tag{5.5.33}$$

ととることができる. 後で使うことを考慮して記録しておくと, ディラック場は今や,

$$\psi_\ell(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_\sigma \int d^3p \, [u_\ell(\mathbf{p},\sigma) e^{ip\cdot x} a(\mathbf{p},\sigma) + v_\ell(\mathbf{p},\sigma) e^{-ip\cdot x} a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma)] \tag{5.5.34}$$

であり, ゼロ運動量での係数関数は,

$$u(0,\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u(0,-\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{5.5.35}$$

$$v(0,\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v(0,-\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.5.36}$$

だ. スピン和は,

$$N(\mathbf{p}) = \frac{1}{2p^0}[-ip^\mu\gamma_\mu + m]\beta\ , \tag{5.5.37}$$

$$M(\mathbf{p}) = \frac{1}{2p^0}[-ip^\mu\gamma_\mu - m]\beta \tag{5.5.38}$$

であり, よって反交換子は (5.5.20) より,

$$[\psi_\ell(x), \psi^\dagger_{\bar\ell}(y)]_+ = \{[-\gamma^\mu\partial_\mu + m]\beta\}_{\ell\bar\ell}\ \Delta(x-y) \tag{5.5.39}$$

で与えられる.

空間反転のもとで場 $\psi(x)$ は $\psi(\mathcal{P}x)$ に比例する場へ変換しなければならないという要求に戻ろう. これが可能なためには (5.5.15) と (5.5.16) の位相が等しくなければならない. よって粒子とその反粒子の固有パリティには,

$$\eta^c = -\eta^* \tag{5.5.40}$$

の関係がなければならない. すなわち, スピン $\frac{1}{2}$ 粒子とその反粒子から成る状態の固有パリティ $\eta\eta^c$ は奇だ. ρ^0 や J/ψ のような負パリティ中間子はクォーク–反クォーク対の s 波束縛状態と解釈できるのはこのためだ. (5.5.15) と (5.5.16) より今や, 因果律を満たすディラック場の空間反転のもとでの変換性は,

$$\mathsf{P}\psi(x)\mathsf{P}^{-1} = \eta^*\beta\psi(\mathcal{P}x) \tag{5.5.41}$$

であることがわかる.

他の反転に進む前に, 以下のことに言及しておく. (5.5.14), (5.5.33), (5.5.26) より, $u(\mathbf{p},\sigma)$ と $v(\mathbf{p},\sigma)$ は $-ip^\mu\gamma_\mu/m$ の固有ベクトルでそれぞれ固有値 $+1$ と -1 を持つ. すなわち,

$$(ip^\mu\gamma_\mu + m)u(\mathbf{p},\sigma) = 0\ , \qquad (-ip^\mu\gamma_\mu + m)v(\mathbf{p},\sigma) = 0 \tag{5.5.42}$$

だ. これより場 (5.5.34) は微分方程式,

$$(\gamma^\mu\partial_\mu + m)\psi(x) = 0 \tag{5.5.43}$$

を満たすことが導かれる．これは有名なスピン $\frac{1}{2}$ の自由粒子のディラック方程式だ．ここで採用した観点から言うと，自由粒子のディラック方程式はまさに，固有順時ローレンツ群の二つの既約表現をまとめて空間反転のもとでも単純に変換する場を作る際に用いた慣習をローレンツ不変な形で記録したものだ．

ディラック場の荷電共役と時間反転の性質を導出するには，係数関数 u と v の複素共役の表現が必要だ．これらの関数はゼロ運動量では実数であるが，有限運動量での係数関数を得るには複素行列 $D(L(p))$ をかけねばならない．(5.4.41) から一般に実数の $\omega_{\mu\nu}$ について，

$$[\exp(\tfrac{1}{2}\, i\mathcal{J}^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu})]^* = \beta\mathcal{C}\exp(\tfrac{1}{2}\, i\mathcal{J}^{\mu\nu}\omega_{\mu\nu})\mathcal{C}^{-1}\beta$$

であり，よって特に

$$D(L(p))^* = \beta\mathcal{C}D(L(p))\mathcal{C}^{-1}\beta$$

がわかる．また $\mathcal{C}^{-1}\beta u(0,\sigma) = -v(0,\sigma)$ と $\mathcal{C}^{-1}\beta v(0,\sigma) = -u(0,\sigma)$ より，

$$u^*(\mathbf{p},\sigma) = -\beta\mathcal{C}v(\mathbf{p},\sigma)\,, \tag{5.5.44}$$

$$v^*(\mathbf{p},\sigma) = -\beta\mathcal{C}u(\mathbf{p},\sigma) \tag{5.5.45}$$

がわかる．場が，荷電共役のもとで，それと空間的距離で交換する別の場に変換するには，ふたたび粒子と反粒子の荷電共役パリティが，

$$\xi^c = \xi^* \tag{5.5.46}$$

で関係している必要がある．この場合，場は以下のように変換する．

$$\mathsf{C}\psi(x)\mathsf{C}^{-1} = -\xi^*\beta\mathcal{C}\psi^*(x)\,. \tag{5.5.47}$$

(右辺の場のエルミート共役を $\psi^\dagger$ ではなく ψ^* と呼んでいる．これは，エルミート共役場が依然として列ベクトルであって行ベクトルではないことを強調するためだ.)

我々は粒子とその反粒子を区別してきたが, その二つが実際は同一である可能性は排除していない. そのようなスピン $\frac{1}{2}$ 粒子は**マヨラナ・フェルミオン** (Majorana fermion) と呼ばれる. (5.5.47) を導いたのと同じ理由により, そのような粒子のディラック場は実条件,

$$\psi(x) = -\beta\mathcal{C}\psi^*(x) \tag{5.5.48}$$

を満たさねばならない. マヨラナ・フェルミオンについては空間反転の固有パリティは虚数で $\eta = \pm i$ でなければならないが, 一方荷電共役パリティは実数で $\xi = \pm 1$ でなければならない.

粒子とその反粒子から成る状態の固有荷電共役位相には, フェルミオンとボソンで重要な違いがある. そのような状態は Φ_0 を真空として,

$$\Phi \equiv \sum_{\sigma,\sigma'} \int d^3p \int d^3p' \ \chi(\mathbf{p},\sigma;\mathbf{p}\,',\sigma')a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)\, a^{c\dagger}(\mathbf{p}\,',\sigma')\Phi_0$$

と書ける. 荷電共役変換でこの状態は,

$$\mathsf{C}\Phi = \xi\xi^c \sum_{\sigma,\sigma'} \int d^3p \int d^3p' \ \chi(\mathbf{p},\sigma;\mathbf{p}\,',\sigma')a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\, a^\dagger(\mathbf{p}\,',\sigma')\Phi_0$$

に変換する. 積分と和の変数を入れ替えて生成演算子の反交換性と (5.5.46) を用いると, これを,

$$\mathsf{C}\Phi = -\sum_{\sigma,\sigma'} \int d^3p \int d^3p' \ \chi(\mathbf{p}\,',\sigma';\mathbf{p},\sigma)a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)\, a^{c\dagger}(\mathbf{p}\,',\sigma')\Phi_0$$

と書き換えれる. すなわち, ディラック場で記述される粒子とその反粒子から成る状態の固有荷電共役パリティは奇だ. それは, 状態の波動関数 χ が粒子と反粒子の運動量とスピンの交換について偶または奇なら, そのような状態に荷電共役演算子を施すとそれぞれ符号 -1 または $+1$ が付くという意味だ. この典型的な例は電子と陽電子の束縛状態, ポジトロニウム (positronium) だ. 二つの最低エネルギー状態

は, 全スピンが $s=0$ と $s=1$ のほとんど縮退した s 波状態の対であり, それぞれパラ・およびオルソ・ポジトロニウムとして知られている. これら二つの状態の波動関数は運動量の入れ替えについて偶で, スピンの z 成分の入れ替えについてそれぞれ偶と奇なので, パラ・およびオルソ・ポジトロニウムはそれぞれ $\mathsf{C}=+1$ および $\mathsf{C}=-1$ を持つ. これらの値はポジトロニウムの崩壊モードで劇的に確かめられている. すなわち, パラ・ポジトロニウムは光子の対 (各々が $\mathsf{C}=-1$ を持つ) に急激に崩壊するが, オルソ・ポジトロニウムは 3 個またはそれ以上の光子にはるかにゆっくりと崩壊できるだけだ. 同様に, 単独の ρ^0 および ω^0 中間子は高エネルギー電子–陽電子消滅で 1 光子中間状態を経由して共鳴として生成され, よって $\mathsf{C}=-1$ を持たねばならないが, それは軌道角運動量ゼロで全クォークスピン 1 のクォーク・反クォーク束縛状態という解釈と一致している.

さて時間反転に移ろう. (4.2.15) で与えられる粒子消滅と反粒子生成の演算子の変換性,

$$\mathsf{T}a(\mathbf{p},\sigma)\mathsf{T}^{-1}=\zeta^*(-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}a(-\mathbf{p},-\sigma)\ , \tag{5.5.49}$$

$$\mathsf{T}a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\mathsf{T}^{-1}=\zeta^c(-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}a^{c\dagger}(-\mathbf{p},-\sigma) \tag{5.5.50}$$

を思い出そう. すると場 (5.5.34) の時間反転は,

$$\mathsf{T}\psi_\ell(x)\mathsf{T}^{-1}=(2\pi)^{-3/2}\sum_\sigma\int d^3p\ (-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}$$
$$\times\left[\zeta^*u^*_\ell(\mathbf{p},\sigma)e^{-ip\cdot x}a(-\mathbf{p},-\sigma)+\zeta^cv^*_\ell(\mathbf{p},\sigma)e^{ip\cdot x}a^{c\dagger}(-\mathbf{p},-\sigma)\right]$$

となる. これを ψ の形に戻すために, 積分と和の変数を $-\mathbf{p}$ および $-\sigma$ と再定義する. そうすると $u^*_\ell(-\mathbf{p},-\sigma)$ と $v^*_\ell(-\mathbf{p},-\sigma)$ をそれぞれ $u_\ell(\mathbf{p},\sigma)$ と $v_\ell(\mathbf{p},\sigma)$ で表した式が必要だ. そのためには, $D(L(\mathbf{p}))^*$ についての以前の結果とともに, $\mathcal{J}^{i0}$ が β と反交換し γ_5 と交換する事

実を用いて,

$$D^*(L(-\mathbf{p})) = \gamma_5\beta D^*(L(\mathbf{p})\beta\gamma_5 = \gamma_5\mathcal{C}D(L(\mathbf{p}))\mathcal{C}^{-1}\gamma_5$$

と書いておく. また, (5.4.36) と (5.5.35)–(5.5.36) より,

$$\gamma_5\mathcal{C}^{-1}u(0,-\sigma) = (-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}u(0,\sigma) \, ,$$

$$\gamma_5\mathcal{C}^{-1}v(0,-\sigma) = (-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}v(0,\sigma)$$

が得られる. よって,

$$(-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}u^*(-\mathbf{p},-\sigma) = -\gamma_5\mathcal{C}\,u(\mathbf{p},\sigma) \, , \tag{5.5.51}$$

$$(-1)^{\frac{1}{2}-\sigma}v^*(-\mathbf{p},-\sigma) = -\gamma_5\mathcal{C}\,v(\mathbf{p},\sigma) \tag{5.5.52}$$

となる. すると時間反転によりディラック場が, 時間反転した点でのディラック場自身に比例する場 (空間的な距離では両者は反交換する) に変換するためには, 固有時間反転位相が,

$$\zeta^c = \zeta^* \tag{5.5.53}$$

と関係している必要がある. この場合,

$$\mathsf{T}\psi(x)\mathsf{T}^{-1} = -\zeta^*\gamma_5\mathcal{C}\psi(-\mathcal{P}x) \tag{5.5.54}$$

となることがわかる.

今度はディラック場とその共役場からスカラー相互作用密度を構成する方法を考えよう. すでに述べたようにディラック表現はユニタリーではないので, $\psi^\dagger\psi$ はスカラーではない. この問題に対処するためには新しい種類の共役場,

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\beta \tag{5.5.55}$$

を定義するのが便利だ. 擬ユニタリー条件 (5.4.32) を使うと, $\bar{\psi}$ を用いて構成したフェルミオンの双 1 次形式はローレンツ変換性,

$$U_0(\Lambda)[\bar{\psi}(x)M\psi(x)]U_0^{-1}(\Lambda) = \bar{\psi}(\Lambda x)D^{-1}(\Lambda)\,M\,D(\Lambda)\psi(\Lambda x) \quad (5.5.56)$$

を持つことがわかる. また, 空間反転のもとで,

$$\mathsf{P}[\bar{\psi}(x)M\psi(x)]\mathsf{P}^{-1} = \bar{\psi}(\mathcal{P}x)\beta M\beta\psi(\mathcal{P}x) \quad (5.5.57)$$

だ. 行列 M を $\mathbf{1}$, γ^μ, $\mathcal{J}^{\mu\nu}$, $\gamma_5\gamma^\mu$, あるいは γ_5 ととると, それぞれスカラー, ベクトル, テンソル, 軸性ベクトル, 擬スカラーとして変換する双 1 次形式が得られる. (「軸性」および「擬」という用語はこれらが通常のベクトルおよびスカラーと反対の空間反転性を持つことを指す. つまり, 擬スカラーは負パリティを持ち, 軸性ベクトルの空間成分と時間成分はそれぞれ正と負のパリティを持つ.) これらの結果は, 双 1 次形式を形成する二つのフェルミオン場が異なる粒子の種類に属するときにも成立する. ただし, この場合には空間反転により固有パリティの比が出る.

例えば元々のフェルミのベータ崩壊の理論は, $\bar{\psi}_p\gamma^\mu\psi_n\,\bar{\psi}_e\gamma_\mu\psi_\nu$ に比例する相互作用密度を含んでいた. 後に, ローレンツ不変でパリティを保存する微分を含まないベータ崩壊の最も一般的な相互作用は, この積で γ_μ を 5 個の共変な型の 4×4 行列, 1, γ^μ, $\mathcal{J}^{\mu\nu}$, $\gamma_5\gamma^\mu$, あるいは γ_5 の任意の一つで置き換えたものの 1 次結合の形をとることが分かった. (2 章で説明したように, 空間反転演算子は, 陽子, 中性子, 電子の全てがパリティ +1 を持つように定義している. もしニュートリノが質量を持たないなら, 必要に応じてニュートリノ場を $\gamma_5\psi_\nu$ で置き換えることにより, そのパリティもまた +1 と定義できる.) リーとヤン[7]は 1956 年にパリティ保存に異議を唱えたとき, 微分を含まない可能な相互作用のリストを拡張して, $\bar{\psi}_pM\psi_n\,\bar{\psi}_eM\psi_\nu$ と $\bar{\psi}_pM\psi_n\,\bar{\psi}_eM\gamma_5\psi_\nu$ に比例する 10 個の項を含むようにした. ここで M は行列 1, γ^μ, $\mathcal{J}^{\mu\nu}$, $\gamma_5\gamma^\mu$,

または γ_5 を動く.

これらの双 1 次形式の荷電共役変換性を調べるのも興味深い. (5.5.47) と (5.4.35)–(5.4.39) を用いると,

$$\begin{aligned}\mathsf{C}(\bar{\psi}M\psi)\mathsf{C}^{-1} &= (\beta\mathcal{C}\psi)^{\mathrm{T}}\beta M(\beta\mathcal{C}\psi^*) = -(\beta\mathcal{C}\psi^*)^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\psi \\ &= \bar{\psi}\mathcal{C}^{-1}M^{\mathrm{T}}\mathcal{C}\psi = \pm\bar{\psi}M\psi \end{aligned} \tag{5.5.58}$$

となる. ここで最後の表現の符号は行列 $\mathbf{1}$, $\gamma_5\gamma_\mu$, γ_5 に対して $+$, γ_μ, $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ に対して $-$ だ. (1 行目の負符号はフェルミ統計から来る. c 数の反交換子は無視する.) よってカレント $\bar{\psi}M\psi$ と相互作用するボソン場はスカラー, 擬スカラー, 軸性ベクトルについては $\mathsf{C}=+1$ を, またベクトルと反対称テンソルについては $\mathsf{C}=-1$ を持たねばならない. これは, (擬スカラーまたは軸性ベクトルの核子カレントと結合する)π^0 が $\mathsf{C}=+1$ を持ち, 光子が $\mathsf{C}=-1$ を持つことを見る一つの方法だ.

5.6 斉次ローレンツ群の一般的な既約表現*

さて, ベクトル場とディラック場という特別な場合から, 斉次ローレンツ群の一般的な既約表現に従って変換する場の場合に議論を一般化しよう. 全ての場はこれらの既約な場の直和として構成できる.

固有順時斉次ローレンツ群 (より正確にはその微小部分) の一般的な表現は, 群の生成子と同じ交換関係 (5.4.4),

$$[\mathcal{J}_{\mu\nu},\mathcal{J}_{\rho\sigma}] = i\,(\mathcal{J}_{\rho\nu}\eta_{\sigma\mu} + \mathcal{J}_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \mathcal{J}_{\sigma\nu}\eta_{\rho\mu} - \mathcal{J}_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) \tag{5.6.1}$$

を満たす行列 $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ の組で与えられる. (もちろん, $\mathcal{J}_{\mu\nu}=-\mathcal{J}_{\nu\mu}$ で, $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ の添字は通常どおり $\eta^{\mu\nu}$ または $\eta_{\mu\nu}$ と縮約して上げ下げされる.) そのような行列を構成するために, まず $\mathcal{J}_{\mu\nu}$ の 6 個の独立な成分を 2 個

*この節はこの本の主要な展開の流れからは幾分外れており, 初めて読む時には飛ばしてもよい.

の 3 元ベクトル, すなわち, 角運動量行列,

$$\mathcal{J}_1 = \mathcal{J}_{23}\ , \qquad \mathcal{J}_2 = \mathcal{J}_{31}\ , \qquad \mathcal{J}_3 = \mathcal{J}_{12} \tag{5.6.2}$$

とブースト行列,

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{J}_{10}\ , \qquad \mathcal{K}_2 = \mathcal{J}_{20}\ , \qquad \mathcal{K}_3 = \mathcal{J}_{30} \tag{5.6.3}$$

に分ける. すると (5.6.1) より,

$$[\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] = i\,\epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k\ , \tag{5.6.4}$$

$$[\mathcal{J}_i, \mathcal{K}_j] = i\,\epsilon_{ijk}\mathcal{K}_k\ , \tag{5.6.5}$$

$$[\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j] = -i\,\epsilon_{ijk}\mathcal{J}_k \tag{5.6.6}$$

だ. ここで i, j, k は 1,2,3 の範囲の値をとり, ϵ_{ijk} は $\epsilon_{123} \equiv +1$ の完全反対称量だ. (5.6.4) はまさに, 行列 $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ がローレンツ群の部分群である回転群の表現を生成すると言っており, (5.6.5) はまさに $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ が 3 元ベクトルである事実を表している. (5.6.6) の右辺の負符号は $\eta_{00} = -1$ の事実から来ており, 以下で重要な役割を果たす.

行列 $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ と $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ を 2 個の結合していない 3 元スピン行列で置き換え,

$$\boldsymbol{\mathcal{A}} \equiv \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mathcal{J}} + i\boldsymbol{\mathcal{K}})\ , \tag{5.6.7}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} \equiv \frac{1}{2}(\boldsymbol{\mathcal{J}} - i\boldsymbol{\mathcal{K}}) \tag{5.6.8}$$

と書くのが非常に便利だ. 交換関係 (5.6.4)–(5.6.6) は,

$$[\mathcal{A}_i, \mathcal{A}_j] = i\,\epsilon_{ijk}\ \mathcal{A}_k\ , \tag{5.6.9}$$

$$[\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j] = i\,\epsilon_{ijk}\ \mathcal{B}_k\ , \tag{5.6.10}$$

$$[\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_j] = 0 \tag{5.6.11}$$

と等価であることを見るのは容易だ. (5.6.9)–(5.6.11) を満たす行列は, 結合していない 1 対の粒子のスピンを表す行列を直和として見つけ

るのと同じ方法で見つけることができる．すなわち，これらの行列の行と列に，

$$a = -A, -A+1, \cdots, +A \,, \tag{5.6.12}$$

$$b = -B, -B+1, \cdots, +B \tag{5.6.13}$$

の範囲の値をとる 1 対の整数および (または) 半整数 a, b の添字をとり，

$$(\boldsymbol{\mathcal{A}})_{a'b',ab} = \delta_{b'b}\ \mathbf{J}^{(A)}_{a'a} \,, \tag{5.6.14}$$

$$(\boldsymbol{\mathcal{B}})_{a'b',ab} = \delta_{a'a}\ \mathbf{J}^{(B)}_{b'b} \tag{5.6.15}$$

と置く.** ここで $\mathbf{J}^{(A)}$ と $\mathbf{J}^{(B)}$ はスピン A または B の標準的なスピン行列で，

$$\left(\mathbf{J}^{(A)}_3\right)_{a'a} = a\delta_{a'a} \,, \tag{5.6.16}$$

$$\left(\mathbf{J}^{(A)}_1 \pm i\mathbf{J}^{(A)}_2\right)_{a'a} = \delta_{a',a\pm1}\sqrt{(A\mp a)(A\pm a+1)} \tag{5.6.17}$$

だ．また $\mathbf{J}^{(B)}$ についても同様だ．この表現は正の整数および (または) 半整数 A と B で表記される．(A, B) 表現は次元数 $(2A+1)(2B+1)$ を持つ．

斉次ローレンツ群の有限次元表現はユニタリーではない．なぜなら，$\boldsymbol{\mathcal{A}}$ と $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ がエルミートなので，$\boldsymbol{\mathcal{J}}$ はエルミートだが $\boldsymbol{\mathcal{K}}$ は反エルミートだからだ．これは (5.6.7) と (5.6.8) の i が原因であり，それは (5.6.6) の負符号から要求される．つまりこれは，斉次ローレンツ群が，コンパクト群である 4 次元回転群 $SO(4)$ と同じではなく，$SO(3,1)$ という非コンパクト群だという事実に由来する．有限次元のユニタリー表現

**回転群のスピン j 表現には，もう一つの形式[8]がある．それは，$2j$ 個のスピン 1/2 表現の対称化された直積，すなわち $2j$ 個の 2 値をとる添字を持つ対称 $SU(2)$ テンソルで書けるという事実に基づいている．よって (A, B) 表現に属する場を $2A$ 個の 2 値の (1/2,0) 添字と $2B$ 個の 2 値の (0,1/2) 添字で書くことができ，後者は前者と区別するためにドットを付けて書かれる．

を持てるのはコンパクト群だけだ(非コンパクト部分が 1 で自明な表現になっている場合を除く). 非ユニタリーな表現を取り扱うことに問題はない. なぜなら, ここで関与しているのは場であって波動関数ではないので, ローレンツ不変な正のノルムを持っている必要はない.

これとは対照的に, 回転群はエルミート行列,

$$\mathcal{J} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \tag{5.6.18}$$

で表される生成子でユニタリーに表現される. 通常のベクトル和の法則により, 斉次ローレンツ群の (A, B) 表現に従って変換する場は,

$$j = A + B,\ A + B - 1, \cdots,\ |A - B|$$

のスピンのように回転する成分を持つことがわかる. このことは, (A, B) 表現を, 多分読者にはよりなじみのあるテンソルとスピノルに同定するのに十分だ. 例えば, (0,0) 場は明らかに単一の $j = 0$ 成分を持つスカラーだ. $(\frac{1}{2}, 0)$ または $(0, \frac{1}{2})$ 場は $j = +\frac{1}{2}$ のみを持てるので, これらはディラック・スピノルの上の 2 成分 (例えば $\gamma_5 = +1$) と下の 2 成分 ($\gamma_5 = -1$) だ. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 場は 4 元ベクトル v^μ の空間部分 $\mathbf{v}$ と時間部分 v^0 に対応する $j = 1$ と $j = 0$ の成分を持つ. より一般的には, (A, A) 場は $2A, 2A - 1, \cdots, 0$ の整数スピンのみを持つ項を含み, 階数 $2A$ でトレース・ゼロの対称テンソルに対応する. (階数 $2A$ の対称テンソルの独立な成分の数は,

$$\frac{4 \cdot 5 \cdots (4 + 2A - 1)}{(2A)!} = \frac{(3 + 2A)!}{6(2A)!}$$

で, トレースがゼロの条件よりこれは,

$$\frac{(3 + 2A)!}{6(2A)!} - \frac{(1 + 2A)!}{6(2A - 2)!} = (2A + 1)^2$$

に減り, これは (A, A) 場に期待されるとおりだ.) もう一つ例を挙げると, (1,0) または (0,1) 場は $j = 1$ のみを持つことができ, (1,0) と

(0,1) 場の各々の既約性を保証する「双対 (duality)」条件,

$$F^{\mu\nu} = \pm \frac{i}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}\,F_{\lambda\rho}$$

を満たす反対称テンソル $F^{\mu\nu}$ に対応する. もちろん, 反対称な二つの添字を持つテンソル $F^{\mu\nu}$ がそのような「自己双対」部分と「反自己双対」部分に分解できるのは, 4 次元においてだけだ.

N 階の一般のテンソルは N 個の $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 4 元ベクトル表現の直積として変換する. よってそれは (適当な対称化と反対称化およびトレースの引き去りによって) $A = N/2, N/2-1, \cdots$ と $B = N/2, N/2-1, \cdots$ を持つ既約項 (A,B) に分解できる. このようにして $A+B$ が整数である任意の既約表現 (A,B) を構成できる. $A+B$ が半奇数であるスピン表現は, 同様にこれらのテンソル表現とディラック表現 $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$ の直積から構成できる. 例えば, ベクトル $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 表現とディラック $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$ 表現の直積をとると可約表現,

$$(\frac{1}{2},\frac{1}{2})\otimes[(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})] = (\frac{1}{2},1)\oplus(\frac{1}{2},0)\oplus(1,\frac{1}{2})\oplus(0,\frac{1}{2})$$

に従って変換するスピノル・ベクトル ψ^μ が得られる. $\gamma_\mu\psi^\mu$ という量は通常の $(\frac{1}{2},0)\oplus(0,\frac{1}{2})$ ディラック場として変換するので, $\gamma_\mu\psi^\mu = 0$ を要求すれば, $(\frac{1}{2},1)\oplus(1,\frac{1}{2})$ 表現† を分離できる. これは**ラリタ・シュウィンガー場** (Rarita–Schwinger field) [9] だ.

この節ではここまで, 固有順時ローレンツ群の表現のみを考察してきた. 空間反転を含むローレンツ群の任意の表現では, 奇数個の空間添字を持つテンソルの符号を逆転させる行列 β が存在しなければならない. 特に,

$$\beta\boldsymbol{\mathcal{J}}\beta^{-1} = +\boldsymbol{\mathcal{J}}\,, \qquad \beta\boldsymbol{\mathcal{K}}\beta^{-1} = -\boldsymbol{\mathcal{K}} \tag{5.6.19}$$

---

† (5.6.18) によれば, そのような場は普通の回転のもとで 2 個の $j = 3/2$ と 2 個の $j = \frac{1}{2}$ 成分の直和として変換する. 2 重性はディラック方程式 $[\gamma^\nu\partial_\nu + m]\psi^\mu = 0$ を課せば取り除かれ, 残った $j = \frac{1}{2}$ 成分は $\partial_\mu\psi^\mu = 0$ を要求すると取り除かれる. これらの条件で場はスピン $j = 3/2$ の 1 個の粒子を記述する.

だ. 行列 (5.6.7) と (5.6.8) でいうと, これは,

$$\beta \boldsymbol{\mathcal{A}} \beta^{-1} = \boldsymbol{\mathcal{B}}\,, \qquad \beta \boldsymbol{\mathcal{B}} \beta^{-1} = \boldsymbol{\mathcal{A}} \tag{5.6.20}$$

だ. このように固有順時斉次ローレンツ群の既約 (A, B) 表現は $A = B$ でなければ空間反転を含むローレンツ群の表現を与えない. すでに見たようにこれらの (A, A) 表現はスカラー, ベクトル, およびトレースゼロの対称テンソルだ. $A \neq B$ の場合, 空間反転を含むローレンツ群の既約表現は直和 $(A, B) \oplus (B, A)$ でその次元数は $2(2A+1)(2B+1)$ だ. その一つは 5.4 節で議論した $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ ディラック表現だ. 4×4 行列 (5.4.29) はこの表現の β 行列を与える. 他の良く知られた例は $(1, 0) \oplus (0, 1)$ 表現だ. すでに見たように, それはまさに自己双対部分と反自己双対部分とを含む 2 階の反対称テンソルだ.

5.7　一般の因果律を満たす場*

今度は, 前節で述べた一般的な既約表現 (A, B) に従って変換する因果律を満たす場の構成に進む. 添字 ℓ はここでは範囲 (5.6.12), (5.6.13) の値をとる 1 対の添字 a, b で置き換えられ, よって今の場合 κ と λ を任意定数として場を,

$$\psi_{ab}(x) = (2\pi)^{-3/2} \sum_\sigma \int d^3p \; \Big[\kappa\, a(\mathbf{p}, \sigma) e^{ip\cdot x} u_{ab}(\mathbf{p}, \sigma) + \lambda\, a^{c\dagger}(\mathbf{p}, \sigma) e^{-ip\cdot x} v_{ab}(\mathbf{p}, \sigma)\Big] \tag{5.7.1}$$

と書いておく. ここではこの粒子が自分自身の反粒子である可能性を残しておく. その場合は $a^c(\mathbf{p}, \sigma) = a(\mathbf{p}, \sigma)$ だ.

まずやるべき仕事はゼロ運動量の係数関数 $u_{ab}(0, \sigma)$ と $v_{ab}(0, \sigma)$ を求めることだ. $u(0, \sigma)$ と $v(0, \sigma)$ の基本条件 (5.1.25)–(5.1.26) はここ

*この節はこの本の主要な展開の流れからは幾分外れており, 初めて読む時には飛ばしてもよい.

では,

$$\sum_{\bar\sigma} u_{\bar a\bar b}(0,\bar\sigma)\mathbf{J}^{(j)}_{\bar\sigma\sigma} = \sum_{a,b} \mathcal{J}_{\bar a\bar b,ab} u_{ab}(0,\sigma)\ ,$$

$$-\sum_{\bar\sigma} v_{\bar a\bar b}(0,\bar\sigma)\mathbf{J}^{(j)*}_{\bar\sigma\sigma} = \sum_{a,b} \mathcal{J}_{\bar a\bar b,ab} v_{ab}(0,\sigma)$$

あるいは (5.6.14)–(5.6.15) を用いて,

$$\sum_{\bar\sigma} u_{\bar a\bar b}(0,\bar\sigma)\mathbf{J}^{(j)}_{\bar\sigma\sigma} = \sum_{a} \mathbf{J}^{(A)}_{\bar a a} u_{a\bar b}(0,\sigma) + \sum_{b} \mathbf{J}^{(B)}_{\bar b b} u_{\bar a b}(0,\sigma)\ , \tag{5.7.2}$$

$$-\sum_{\bar\sigma} v_{\bar a\bar b}(0,\bar\sigma)\mathbf{J}^{(j)*}_{\bar\sigma\sigma} = \sum_{a} \mathbf{J}^{(A)}_{\bar a a} v_{a\bar b}(0,\sigma) + \sum_{b} \mathbf{J}^{(B)}_{\bar b b} v_{\bar a b}(0,\sigma) \tag{5.7.3}$$

となる. しかし (5.7.2) はクレブシュ・ゴルダン係数 $C_{AB}(j\sigma;ab)$ を定義する条件だ. これらの係数は以下の要求によって定義される. すなわち, もし Ψ_{ab} が微小回転のもとで,

$$\delta\Psi_{ab} = i\sum_{\bar a} \boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J}^{(A)}_{\bar a a}\Psi_{\bar a b} + i\sum_{\bar b} \boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J}^{(B)}_{\bar b b}\Psi_{a\bar b}$$

と変換するならば, 同じ回転のもとで状態,

$$\Psi^j{}_\sigma \equiv \sum_{ab} C_{AB}(j\sigma;ab)\Psi_{ab}$$

は,

$$\delta\Psi^j{}_\sigma = i\sum_{\bar\sigma} \boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J}^{(j)}_{\bar\sigma\sigma}\Psi^j{}_{\bar\sigma}$$

と変換しなければならない. (5.7.2) を見ればこの要求が係数関数 $u_{ab}(0,\sigma)$ によって満たされていることが分かり, よって, 可能な比例因子を除いて $u_{ab}(0,\sigma)$ はちょうど $C_{AB}(j\sigma;ab)$ に等しい. この定数は慣習上,

$$u_{ab}(0,\sigma) = (2m)^{-1/2} C_{AB}(j\sigma;ab) \tag{5.7.4}$$

となるように選ばれている. 斉次ローレンツ群の各既約 (A,B) 表現は回転群の与えられたスピン j 表現をせいぜい1回しか含まないの

で, この結果は一意的だ. 同様に, (5.6.16)-(5.6.17) を見ると角運動量行列の複素共役は,

$$-\mathbf{J}^{(j)*}_{\sigma\sigma'} = (-1)^{\sigma-\sigma'}\mathbf{J}^{(j)}_{-\sigma,-\sigma'} \tag{5.7.5}$$

であることがわかる. よって (5.7.3) を $(-1)^{j-\sigma}v_{ab}(\mathbf{p},-\sigma)$ に関して書けば, それは (5.7.2) と同じ形をとる. 定数因子を適当に調整すると, $v(0,\sigma)$ の一意的な解は,

$$v_{ab}(0,\sigma) = (-1)^{j+\sigma}u_{ab}(0,-\sigma) \tag{5.7.6}$$

だ.

さて有限運動量の係数関数を計算するためにはブーストを実行しなければならない. 固定した方向 $\hat{\mathbf{p}} \equiv \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ について, ブースト (2.5.24) は,

$$\cosh\theta = \sqrt{\mathbf{p}^{\,2}+m^2}/m\,, \qquad \sinh\theta = |\mathbf{p}|/m \tag{5.7.7}$$

で定義されるパラメータ θ の関数として書けるので, $L^\mu{}_\nu(p)$ の代わりに $L^\mu{}_\nu(\theta)$ と書く. ここで,

$$\begin{aligned} L^i{}_k(\theta) &= \delta_{ik} + (\cosh\theta - 1)\hat{p}_i\hat{p}_k, \\ L^i{}_0(\theta) &= L^0{}_i(p) = \hat{p}_i\sinh\theta, \\ L^0{}_0(\theta) &= \cosh\theta \end{aligned} \tag{5.7.8}$$

だ. このパラメータの取り方の利点は,

$$L(\bar{\theta})L(\theta) = L(\bar{\theta}+\theta) \tag{5.7.9}$$

となることだ. 微小な θ については, $[L(\theta)]^\mu{}_\nu \to \delta^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu$ でありここで, $\omega^i{}_0 = \omega^0{}_i = \hat{p}_i\theta$ および $\omega^i{}_j = \omega^0{}_0 = 0$ だ. (2.2.24) から (2.2.26) を導いたのと同様に,

$$D\Big(L(p)\Big) = \exp(-i\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{K}}\theta) \tag{5.7.10}$$

が導ける. これは斉次ローレンツ群の任意の表現について成り立つ. 既約な (A,B) 表現については (5.6.7) と (5.6.8) より,

$$i\boldsymbol{\mathcal{K}} = \boldsymbol{\mathcal{A}} - \boldsymbol{\mathcal{B}} \tag{5.7.11}$$

が得られ, $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ と $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ は交換する行列なので,

$$D\Big(L(p)\Big) = \exp(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{A}}\theta)\exp(+\hat{\mathbf{p}}\cdot\boldsymbol{\mathcal{B}}\theta) \tag{5.7.12}$$

だ. より詳細には, (5.6.14) と (5.6.15) を用いて,

$$D\Big(L(p)\Big)_{a'b',ab} = \Big(\exp\big(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(A)}\theta\big)\Big)_{a'a}\Big(\exp\big(+\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(B)}\theta\big)\Big)_{b'b} \tag{5.7.13}$$

だ. すると (5.7.4) と (5.7.6) より有限運動量での係数関数は,

$$\begin{aligned} u_{ab}(\mathbf{p},\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2p^0}}\sum_{a'b'}&\Big(\exp\big(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(A)}\theta\big)\Big)_{aa'} \\ &\times\Big(\exp\big(+\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(B)}\theta\big)\Big)_{bb'}C_{AB}(j\sigma;a'b') \end{aligned} \tag{5.7.14}$$

および,

$$v_{ab}(\mathbf{p},\sigma) = (-1)^{j+\sigma}u_{ab}(\mathbf{p},-\sigma) \tag{5.7.15}$$

となる. これらの結果は与えられた変換型 (A,B) に対する場を陽に与えるので, この型の場 (5.1.31) は定数因子 κ と λ を除いて一意的だ.

この形式ではローレンツ・スカラーの相互作用密度を構成するのは非常に簡単だ. 斉次ローレンツ群の (A,B) 表現は $(A,0)$ および $(0,B)$ 表現の直積なので一般のローレンツ変換則 (5.1.6), (5.1.7) はここでは,

$$U_0(\Lambda)\psi_{ab}(x)U_0^{-1}(\Lambda) = \sum_{a'b'}D^{A0}_{a,a'}(\Lambda^{-1})D^{0B}_{b,b'}(\Lambda^{-1})\psi_{a'b'}(\Lambda x) \tag{5.7.16}$$

となる. さらに (5.6.14) と (5.6.15) より $(A,0)$ および $(0,B)$ 表現の行列生成子はそれぞれスピン A と B に対するスピン行列であることが

わかる. このようにして,

$$\sum_{a_1 a_2 \cdots a_n} \sum_{b_1 b_2 \cdots b_n} g_{a_1 a_2 \cdots a_n; b_1 b_2 \cdots b_n} \psi^{(1)}_{a_1 b_1}(x)\, \psi^{(2)}_{a_2 b_2}(x) \cdots \psi^{(n)}_{a_n b_n}(x) \tag{5.7.17}$$

の形のスカラーを, 以下のやり方で構成できる. すなわち, 単に $g_{a_1 a_2 \cdots a_n; b_1 b_2 \cdots b_n}$ を, スピン $A_1, A_2, \cdots A_n$ を結合してスカラーを作るための係数とスピン $B_1, B_2, \cdots B_n$ を結合してスカラーを作るための係数との積にとればよい. (我々は微分を含む相互作用を陽には考えていないが, このやり方で n 個の場を含む最も一般的な相互作用を得ることができる. なぜなら, (A, B) の型の場の微分は, 微分を含まない他の型の場に常に分解できるからだ.) 例えば, 変換の型 (A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3) を持つ 3 個の場の積から作られる最も一般的なローレンツ・スカラーは g を 1 個の自由なパラメータとして,

$$g \sum_{a_1 a_2 a_3} \sum_{b_1 b_2 b_3} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \psi^{(1)}_{a_1 b_1} \psi^{(2)}_{a_2 b_2} \psi^{(3)}_{a_3 b_3} \tag{5.7.18}$$

だ. これは最も一般的な 3 個の場の相互作用だ. ((5.7.17) の括弧は, ウィグナーの「3-j」記号[10],

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \equiv \sum_{m'_3} C_{j_1 j_2}(j_3 m'_3, m_1 m_2) C_{j_3 j_3}(00, m'_3 m_3)$$

を表し, それは 3 個のスピンから回転に関するスカラーを作る際の結合を表す.)

S 行列がローレンツ不変であるためには, 相互作用密度 $\mathcal{H}(x)$ が (5.7.18) のようにスカラーであるだけでは十分でなく, $\mathcal{H}(x)$ が $\mathcal{H}(y)$ と空間的な距離 $x-y$ で交換することも必要だ. この条件をいかに満足させるかを見るには, 同じ種類の粒子の二つの場, すなわち (A, B) の型の場 ψ と $(\tilde{A}, \tilde{B})$ の型の場 $\tilde{\psi}$ の共役場 $\tilde{\psi}^\dagger$ との交換子または反交

換子を考察すればよい．それは，

$$\left[\psi_{ab}(x), \tilde{\psi}^{\dagger}_{\tilde{a}\tilde{b}}(y)\right]_{\mp} = (2\pi)^{-3} \int d^3p\ (2p^0)^{-1} \pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) \times \left[\kappa\tilde{\kappa}^* e^{ip\cdot(x-y)} \mp \lambda\tilde{\lambda}^* e^{-ip\cdot(x-y)}\right] \tag{5.7.19}$$

となる．ここで $\pi(\mathbf{p})$ はスピン和，

$$(2p^0)^{-1}\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) \equiv \sum_\sigma u_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\tilde{u}^*_{\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p},\sigma) = \sum_\sigma v_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\tilde{v}^*_{\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p},\sigma) \tag{5.7.20}$$

だ．また，いつものとおり上下の符号はそれぞれボソンとフェルミオンの場合だ．(ここで $\tilde{\psi}$ 場では異なる係数 $\tilde{\kappa}$ と $\tilde{\lambda}$ を許す.) より詳しくは，

$$\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) = \sum_{a'b'}\sum_{\tilde{a}'\tilde{b}'}\sum_\sigma C_{AB}\Big(j\sigma;a'b'\Big)\ C_{\tilde{A}\tilde{B}}\Big(j\sigma;\tilde{a}'\tilde{b}'\Big) \times \Big(\exp\Big(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(A)}\theta\Big)\Big)_{aa'}\Big(\exp\Big(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(B)}\theta\Big)\Big)_{bb'} \times \Big(\exp\Big(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(A)}\theta\Big)\Big)^*_{\tilde{a}\tilde{a}'}\ \Big(\exp\Big(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(B)}\theta\Big)\Big)^*_{\tilde{b}\tilde{b}'} \tag{5.7.21}$$

だ．

関数 $\pi(\mathbf{p})$ は陽に計算されている[11]．ここで我々に関心があるのは，以下の事実だ．つまり，その関数が $\mathbf{p}$ と p^0 の多項式の関数 P の質量殻 (mass-shell) 上での値，

$$\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) \ = \ P_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}\Big(\mathbf{p},\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}\Big) \tag{5.7.22}$$

になり，P は $2A+2\tilde{B}$ が偶数か奇数かに応じて偶か奇となる．

$$P(-\mathbf{p},-p^0) \ = \ (-)^{2A+2\tilde{B}}\ \ P(\mathbf{p},p^0)\,. \tag{5.7.23}$$

ここではこれを $\mathbf{p}$ のある特別な方向についてだけ確かめよう．$\mathbf{p}$ を 3 軸方向にとると，(5.7.21) は，

$$\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) = \sum_\sigma C_{AB}(j\sigma;ab)\ C_{\tilde{A}\tilde{B}}(j\sigma;\tilde{a}\tilde{b})\exp\Big([-a+b-\tilde{a}+\tilde{b}]\,\theta\Big)$$

となる. クレブシュ・ゴルダン係数は$\sigma = a + b$ かつ $\sigma = \tilde{a} + \tilde{b}$ でなければゼロになるので,

$$-a + b - \tilde{a} + \tilde{b} = -2a + \sigma + 2\tilde{b} - \sigma = 2\tilde{b} - 2a$$

の置き換えができる. $p^0 \equiv \sqrt{\mathbf{p}^{\,2} + m^2}$ として $\exp(\pm\theta)$ は $(p^0 \pm p^3)/m$ と書けるので, 今の場合,

$$\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) = \sum_{\sigma} C_{AB}(j\sigma; ab) C_{\tilde{A}\tilde{B}}(j\sigma, \tilde{a}\tilde{b}) \times \begin{cases} \left[(p^0 + p^3)/m\right]^{2\tilde{b}-2a} & (\tilde{b} \geq a) \\ \left[(p^0 - p^3)/m\right]^{2a-2\tilde{b}} & (a \geq \tilde{b}) \end{cases}$$

だ. 確かに $\pi(\mathbf{p})$ は多項式 $P(\mathbf{p}, p^0)$ の質量殻での値で書けることがわかる. また, $2\tilde{b} - 2a$ は $2\tilde{B} + 2A$ から偶数を引いた数に等しいので, この多項式は反転条件 (5.7.23) を満たす.

$\mathbf{p}$ と $\sqrt{\mathbf{p}^{\,2} + m^2}$ の任意の多項式は ($\sqrt{\mathbf{p}^{\,2} + m^2}$ の偶数冪を $\mathbf{p}$ で表すことにより) $\sqrt{\mathbf{p}^{\,2} + m^2}$ に関して1次式で書けるので, $\pi(\mathbf{p})$ は,

$$\pi_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) = P_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) + 2\sqrt{\mathbf{p}^{\,2} + m^2}\, Q_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(\mathbf{p}) \tag{5.7.24}$$

と書ける. ここで P と Q は今や $\mathbf{p}$ のみの多項式で,

$$P(-\mathbf{p}) = (-)^{2A+2\tilde{B}} P(\mathbf{p}) \,, \tag{5.7.25}$$

$$Q(-\mathbf{p}) = -(-)^{2A+2\tilde{B}} Q(\mathbf{p}) \tag{5.7.26}$$

を満たす. 空間的な $x - y$ の場合, $x^0 = y^0$ となるローレンツ系をとることができ, (5.7.19) は,

$$\begin{aligned}[\psi_{ab}(x), \psi^{\dagger}_{\tilde{a}\tilde{b}}(y)]_{\mp} = &[\kappa\tilde{\kappa}^* \mp (-)^{2A+2\tilde{B}} \lambda\tilde{\lambda}^*] P_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(-i\boldsymbol{\nabla}) \Delta_+(\mathbf{x} - \mathbf{y}, 0) \\ &+ [\kappa\tilde{\kappa}^* \pm (-)^{2A+2\tilde{B}} \lambda\tilde{\lambda}^*] Q_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(-i\boldsymbol{\nabla}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})\end{aligned}$$

と書ける. これが $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ のときゼロとなるためには,

$$\kappa\tilde{\kappa}^* = \pm(-1)^{2A+2\tilde{B}}\lambda\tilde{\lambda}^* \tag{5.7.27}$$

である必要がある.

ここでは ψ と $\tilde{\psi}$ が等しく, よって $A = \tilde{A}$ および $B = \tilde{B}$ である特別の場合を考えよう. (そのような交換子または反交換子が $[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(y)]$ に現れるのは避けれない. なぜならハミルトニアンのエルミート性より, $\mathcal{H}(x)$ が ψ を含むなら, $\psi^\dagger$ も含むことが要求されるからだ.) この場合, (5.7.27) より,

$$|\kappa|^2 = \pm(-)^{2A+2B}|\lambda|^2$$

となる. これは,

$$\pm\,(-1)^{2A+2B} = +1 \tag{5.7.28}$$

かつ,

$$|\kappa|^2 = |\lambda|^2 \tag{5.7.29}$$

ならば, そしてそのときに限り可能だ. もちろん, $2A+2B$ は $2j$ と偶数だけ異なるので, (5.7.28) は, 粒子は $2j$ が偶数か奇数かに応じてボソンあるいはフェルミオンであることを表している. これはスピンと統計の一般的な関係[12]であり, 我々はすでにその特別な例を, スカラー場, ベクトル場, またはディラック場で記述される粒子について見た.

さて場 ψ と $\tilde{\psi}$ が異なる一般の場合に戻ろう. (5.7.27) を用いて, 両辺を $|\tilde{\kappa}|^2 = |\tilde{\lambda}|^2$ で割ると,

$$\frac{\kappa}{\tilde{\kappa}} = (-1)^{2B+2\tilde{B}}\ \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}}$$

が得られる. 任意の場について,

$$\lambda = (-)^{2B} c\,\kappa \tag{5.7.30}$$

が導かれる. ここで c は与えられた粒子の全ての場に共通の因子だ. さらに, (5.7.29) より, c はちょうど位相因子である, すなわち $|c|=1$ であることがわかる. このため, 全ての場について演算子 $a(\mathbf{p},\sigma)$ と $a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma)$ の相対的位相の再定義により c を取り除いて, $c=1$, よって $\lambda=(-)^{2B}\kappa$ にできる. また, 各々の場の型に対する因子 κ は, 場全体のスケールの再定義により取り除いてよい. 以上の全てから, 与えられた粒子の (A,B) 場の公式が得られる. それは全体にかかる因子を除いて一意的で,

$$\psi_{ab}(x)=(2\pi)^{-3/2}\sum_{\sigma}\int d^3p\ \Big[u_{ab}(\mathbf{p},\sigma)a(\mathbf{p},\sigma)e^{ip\cdot x} +(-)^{2B}v_{ab}(\mathbf{p},\sigma)a^{c\dagger}(\mathbf{p},-\sigma)e^{-ip\cdot x}\Big] \tag{5.7.31}$$

となる.

与えられた粒子の異なる場が, 実際に物理的に異なる可能性を表すわけではない. 例えば, $j=0$ の場合に可能な場は型 (A,A) の場だ. (なぜなら 3 角不等式 $|A-B|\le j\le A+B$ はここでは $A=B$ を要求するからだ.) $(0,0)$ スカラー場 ϕ から出発して, そのような (A,A) 場を $2A$ 階微分,

$$\{\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_{2A}}\}\phi \tag{5.7.32}$$

から容易に構成できる. ここで $\{\}$ は, 例えば,

$$\{\partial_\mu\partial_\nu\}\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^\mu\partial x^\nu}-\tfrac{1}{4}\,\eta_{\mu\nu}\,\Box$$

のようにトレースゼロの部分を表す. (階数 N でトレースゼロの対称テンソルは $(N/2,N/2)$ 表現に従って変換することを思い出そう.) しかし (5.7.31) は, 与えられたスピン j の粒子について因果律を満たす一意的な (A,B) 場を表す. よって, $j=0$ の (A,A) 場 (5.7.31) はスカラー場の $2A$ 階微分 (5.7.32) の線形結合に他ならない.

より一般的には, 与えられたスピン j の粒子の任意の場 (A,B) は型 $(j,0)$ の場[13] $\varphi_\sigma(x)$ に作用する $2B$ 階の微分演算子 (または型 $(0,j)$ の場に作用する $2A$ 階の微分演算子) として表せる. このことを見るために, 場,

$$\{\partial_{\mu_1}\cdots\partial_{\mu_{2B}}\}\,\varphi_\sigma \tag{5.7.33}$$

を考える. これは表現 (B,B) と $(j,0)$ の直積として変換し, よって通常のベクトル和の法則によって, $|j-B|\leq A\leq j+B$ あるいは同等なことだが $|A\ -\ B|\leq j\leq A+B$ を満たす全ての既約表現 (A,B) に従って変換する場に分解できる. (5.7.31) は, 与えられたスピン j の粒子について型 (A,B) の一意的な場を表すので, それは微分 (5.7.33) から得られる (A,B) 場に他ならない.**

さてこれらの場の反転のもとでの振舞いを考察しよう. まず空間反転から始める. 4.2 節の結果を用いると, 粒子消滅と反粒子生成の演算子の空間反転性は η と η^c をそれぞれ粒子と反粒子の固有パリティとして,

$$\mathsf{P}a(\mathbf{p},\sigma)\mathsf{P}^{-1}=\eta^*a(-\mathbf{p},\sigma)\,, \tag{5.7.34}$$

$$\mathsf{P}a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\mathsf{P}^{-1}=\eta^c a^{c\dagger}(-\mathbf{p},\sigma) \tag{5.7.35}$$

だ. したがって一般の因果律を満たす (A,B) 場 (5.7.31) はパリティ演算子 P により,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\psi^{AB}_{ab}(x)\mathsf{P}^{-1}=(2\pi)^{-3/2}\sum_\sigma\int d^3p\,\Big[&\eta^*a(-\mathbf{p},\sigma)e^{ip\cdot x}\ u^{AB}_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\\&+\eta^c(-)^{2B}a^{c\dagger}(-\mathbf{p},\sigma)e^{-ip\cdot x}\ v^{AB}_{ab}(\mathbf{p},\sigma)\Big]\end{aligned} \tag{5.7.36}$$

**この議論に唯一欠点があるとすれば, この様にして得られた (A,B) 場のいくつかが実際にはゼロになる場合であろう. しかしこの場合, $(j,0)$ 場 φ_σ は場の方程式 $\Sigma_\sigma M_\sigma(\partial/\partial x)\varphi_\sigma(x)=0$ を満たし, よって各 $\bar\sigma$ について $\Sigma_\sigma M_\sigma(ip)u_\sigma(\mathbf{p},\bar\sigma)=0$ を満たす. (j,σ) 表現のクレブシュ・ゴルダン係数 $C_{j0}(j\bar\sigma;\sigma 0)$ は単にクロネッカーの記号 $\delta_{\bar\sigma\sigma}$ なので, これは $\Sigma_\sigma M_\sigma(ip)D_{\sigma\sigma'}(L(p))=0$ を要求する. それは, $D(\Lambda)$ が逆 $D(\Lambda^{-1})$ を持つので, 全ての $M_\sigma(ip)$ がゼロにならなければ不可能だ. このように $(j,0)$ 場 $\varphi_\sigma(x)$ はクライン・ゴルドン方程式 $(\Box-m^2)\,\varphi_\sigma(x)\ =\ 0$ 以外の場の方程式を満たさないので, (5.7.33) から得られたどの (A,B) 場もゼロになれない.

に変換する. ここで積分変数を $\mathbf{p}$ から $-\mathbf{p}$ に変えたいのだが, そのためには $u_{ab}(-\mathbf{p},\sigma)$ と $v_{ab}(-\mathbf{p},\sigma)$ を評価する必要がある. そうするには, (5.7.14) と (5.7.15) を見返し, またクレブシュ・ゴルダン係数の対称性[14],

$$C_{AB}(j\sigma;ab) = (-)^{A+B-j}C_{BA}(j\sigma;ba) \tag{5.7.37}$$

を用いるだけでよい. これより,

$$u_{ab}^{AB}(-\mathbf{p},\sigma) = (-)^{A+B-j}\ u_{ba}^{BA}(\mathbf{p},\sigma)\,, \tag{5.7.38}$$

$$v_{ab}^{AB}(-\mathbf{p},\sigma) = (-)^{A+B-j}\ v_{ba}^{BA}(\mathbf{p},\sigma) \tag{5.7.39}$$

が得られ, よって以前と同様に $\mathcal{P}x \equiv (-\mathbf{x},x^0)$ として,

$$\begin{aligned}\mathsf{P}\psi_{ab}^{AB}(x)\mathsf{P}^{-1} = (2\pi)^{-3/2}\sum_\sigma\int d^3p\ (-1)^{A+B-j}\\ \times\Big[\eta^* a(\mathbf{p},\sigma)e^{ip\cdot\mathcal{P}x}u_{ba}^{BA}(\mathbf{p},\sigma)\\ +\eta^{\mathrm{c}}(-)^{2B}a^{\mathrm{c}\dagger}(\mathbf{p},\sigma)e^{-ip\cdot\mathcal{P}x}v_{ba}^{BA}(\mathbf{p},\sigma)\Big]\end{aligned} \tag{5.7.40}$$

だ. これは, 消滅項と生成項の係数が (5.7.31) と異なる点を除けば, $\mathcal{P}x$ で評価された因果律を満たす場 ψ_{ba}^{BA} だ. しかしこれらの係数は全体にかかる定数因子を除いて (5.7.31) と同じでなければならない. なぜなら, スケールを除いて (5.7.31) は任意の型の場について因果律を満たす唯一のものだからだ. 従って, (5.7.40) の 2 項の係数の比は (5.7.31) と同じでなければならない (ただし, これは (B,A) 場だとしているので, B は A と入れ替える必要がある), すなわち,

$$\eta^{\mathrm{c}}(-)^{2B}/\eta^* = (-)^{2A} \tag{5.7.41}$$

だ. しかし $A-B$ はスピン j と整数だけ異なるので, これより,

$$\eta^{\mathrm{c}} = \eta^*(-)^{2j} \tag{5.7.42}$$

が得られる. この結果の特別の場合を 5.2, 5.3, 5.5 節で, それぞれ $j=0$, $j=1$, $j=\frac{1}{2}$ の場合について見た. 今や結果は一般的だ. すなわち, 粒子–反粒子対の固有パリティ $\eta^{c}\eta$ はボソンの場合 $+1$, フェルミオンの場合 -1 だ. (5.7.40) に (5.7.42) を用いて, 空間反転についての最終結果は,

$$\mathsf{P}\psi_{ab}^{AB}(x)\mathsf{P}^{-1}=\eta^{*}(-)^{A+B-j}\psi_{ba}^{BA}(-\mathbf{x},x^{0}) \tag{5.7.43}$$

となる.

これがディラック場にどのように適用されるかを見てみよう. ディラック場の上の $(\frac{1}{2},0)$ 成分と下の $(0,\frac{1}{2})$ 成分について, 符号 $(-1)^{A+B-j}$ はちょうど $+1$ なので, パリティ演算子は単に $\mathbf{x}$ を $-\mathbf{x}$ に変え, 上成分と下成分を入れ替え, 場に η^{*} をかけるだけだ. ディラック場の上成分と下成分の入れ替えは (5.5.41) の行列 β によって果たされる.

今度は荷電共役変換を考えよう. 粒子消滅と反粒子生成の演算子にそれが及ぼす効果は ξ と ξ^{c} をそれぞれ粒子と反粒子の荷電共役パリティとして,

$$\mathsf{C}a(\mathbf{p},\sigma)\ \mathsf{C}^{-1}=\xi^{*}a^{c}(\mathbf{p},\sigma), \tag{5.7.44}$$

$$\mathsf{C}a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\ \mathsf{C}^{-1}=\xi^{c}a^{\dagger}(\mathbf{p},\sigma) \tag{5.7.45}$$

だ. この変換を場 (5.7.31) に施すと,

$$\begin{aligned}\mathsf{C}\psi_{ab}^{AB}(x)\mathsf{C}^{-1}=&(2\pi)^{-3/2}\sum_{\sigma}\int d^{3}p\ u_{ab}^{AB}(\mathbf{p},\sigma)\\&\times\left[\xi^{*}a^{c}(\mathbf{p},\sigma)e^{ip\cdot x}+\xi^{c}(-)^{2B}a^{\dagger}(\mathbf{p},-\sigma)(-)^{j-\sigma}e^{-ip\cdot x}\right]\end{aligned} \tag{5.7.46}$$

となる. この (A,B) 場の荷電共役についての式を同じ粒子の (B,A) 場の共役場,

$$\begin{aligned}\psi_{ba}^{BA\dagger}(x)=&(2\pi)^{-3/2}\sum_{\sigma}\int d^{3}p\,u_{ba}^{AB^{*}}\ (\mathbf{p},\sigma)\\&\times\left[(-1)^{2A}(-1)^{j-\sigma}a^{c}(\mathbf{p},-\sigma)e^{ip\cdot x}+a^{\dagger}(\mathbf{p},\sigma)e^{-ip\cdot x}\right]\end{aligned} \tag{5.7.47}$$

と比較するのが有益だ. u^* を計算するには以前の結果,

$$\mathbf{J}^{(j)*} = -\mathcal{C}\mathbf{J}^{(j)}\mathcal{C}^{-1} , \qquad \mathcal{C}_{\bar{\sigma}\sigma} \propto (-1)^{j-\sigma}\delta_{\bar{\sigma},-\sigma}$$

を用いる. (5.7.14) のクレブシュ・ゴルダン係数は実数なので,

$$u_{ba}^{BA}(\mathbf{p},\sigma)^* = \frac{1}{\sqrt{2p^0}} \sum_{a'b'} \Big(\exp(-\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(A)}\theta)\Big)_{-a,-a'} \times \Big(\exp\,(\hat{\mathbf{p}}\cdot\mathbf{J}^{(B)}\theta)\Big)_{-b,-b'}(-)^{a'-a}(-)^{b'-b}C_{BA}(j\sigma;b'a')$$

だ. クレブシュ・ゴルダン係数の反転性[14],

$$C_{BA}(j,-\sigma;-b',-a') = C_{AB}(j\sigma;a'b') \tag{5.7.48}$$

と, $a'+b'=\sigma$ でなければそれらの係数がゼロになるという事実を用いて,

$$u_{-b,-a}^{BA}(\mathbf{p},-\sigma)^* = (-)^{a+b-\sigma}\; u_{ab}^{AB}(\mathbf{p},\sigma) \tag{5.7.49}$$

と書ける. すると共役場 (5.7.47) は ($a\to -a$, $b\to -b$, $\sigma\to-\sigma$ の置き換えをして),

$$\psi_{-b,-a}^{BA\dagger}(x) = (2\pi)^{-3/2}\sum_\sigma \int d^3p\;(-)^{a+b-\sigma}u_{ab}^{AB}(\mathbf{p},\sigma) \times\Big[(-)^{2A}(-)^{j+\sigma}\;a^{\mathrm{c}}(\mathbf{p},\sigma)e^{ip\cdot x} + a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)e^{-ip\cdot x}\Big]$$

となる. 符号の関係式 $(-)^{-2A-j} = (-)^{2B+j}$ を用いると, これは,

$$(-)^{-2A-a-b-j}\;\psi_{-b,-a}^{BA\dagger}(x) = (2\pi)^{-3/2}\sum_\sigma\int d^3p\;u_{ab}^{AB}(\mathbf{p},\sigma) \times\;\left[a^{\mathrm{c}}(\mathbf{p},\sigma)e^{ip\cdot x} + (-)^{j-\sigma+2B}a^\dagger(\mathbf{p},-\sigma)e^{-ip\cdot x}\right] \tag{5.7.50}$$

だ. $\mathsf{C}\;\psi_{ab}^{AB}(x)\;\mathsf{C}^{-1}$ が全ての通常の場と空間的に離れた距離で交換または反交換するためには, それが $\psi_{-b,-a}^{BA\dagger}(x)$ に比例する必要がある.

なぜならこれが因果律を満たす (B,A) として変換する唯一の場だからだ. (5.7.50) を (5.7.46) と比較して, 荷電共役パリティが,

$$\xi^* = \xi^{\rm c} \tag{5.7.51}$$

の関係を満たす場合にのみ, これが可能であることがわかる. その場合,

$$\mathsf{C}\,\psi_{ab}^{AB}(x)\,\mathsf{C}^{-1} = \xi^*(-)^{-2A-a-b-j}\,\psi_{-b-a}^{BA\dagger}(x) \tag{5.7.52}$$

だ. 関係式 (5.7.51) はすでにスピン 0, 1, $\frac{1}{2}$ について 5.2, 5.3, 5.5 節で出てきており, その電子–陽電子とクォーク–反クォーク状態に対する意味をいくつか 5.5 節で指摘した.

特に, 粒子が自分自身の反粒子である場合, (5.7.52) は, 左辺の荷電共役演算子と右辺の位相 ξ^* なしで満たされている.

$$\psi_{ab}^{AB}(x) = (-)^{-2A-a-b-j}\,\psi_{-b-a}^{BA\dagger}(x)\,. \tag{5.7.53}$$

この種の実条件の例はすでに 5.5 節でスピン $\frac{1}{2}$ のマヨラナ粒子について見ている.

最後に時間反転に進もう. 粒子消滅と反粒子生成の演算子に作用すると, これは,

$$\mathsf{T}a(\mathbf{p},\sigma)\mathsf{T}^{-1} = \zeta^*(-1)^{j-\sigma}a(-\mathbf{p},-\sigma)\,, \tag{5.7.54}$$

$$\mathsf{T}a^{{\rm c}\dagger}(\mathbf{p},\sigma)\mathsf{T}^{-1} = \zeta^{\rm c}(-1)^{j-\sigma}a^{{\rm c}\dagger}(-\mathbf{p},-\sigma) \tag{5.7.55}$$

を与える. したがって既約場 (5.7.31) は,

$$\mathsf{T}\psi_{ab}^{AB}(x)\mathsf{T}^{-1} = (2\pi)^{-3/2}\sum_\sigma\int d^3p\,u_{ab}^{AB*}(\mathbf{p},\sigma)(-1)^{j-\sigma}$$
$$\times\left[\zeta^* a(-\mathbf{p},-\sigma)e^{-ip\cdot x} + \zeta^{\rm c}(-1)^{2B}a^{{\rm c}\dagger}(-\mathbf{p},-\sigma)e^{ip\cdot x}\right] \tag{5.7.56}$$

の変換性を持つ. 係数関数の複素共役を計算するには, (5.7.14) と標準的な公式[14],

$$C_{AB}(j,\sigma;a,b) = (-)^{A+B-j}C_{AB}(j,-\sigma;-a,-b) \tag{5.7.57}$$

を用いる. すると,

$$u^{AB*}_{ab}(-\mathbf{p},-\sigma) = (-)^{a+b+\sigma+A+B-j}u^{AB}_{-a,-b}(\mathbf{p},\sigma) \tag{5.7.58}$$

が得られる. (5.7.56) の積分と和の変数を $-\mathbf{p}$ と $-\sigma$ に変えると, (A,B) 場が時間反転により別の (A,B) 場に比例するものに変換されるためには,

$$\zeta^c = \zeta^* \tag{5.7.59}$$

が必要なことがわかる. その場合,

$$\mathsf{T}\psi^{AB}_{ab}(x)\mathsf{T}^{-1} = (-)^{a+b+A+B-2j}\,\zeta^*\,\psi^{AB}_{-a,-b}(\mathbf{x},-x^0) \tag{5.7.60}$$

となる.

* * *

スピン $j \geq 3/2$ の粒子の場の理論の様々な困難が折々に報告[15]されてきたことは触れておかねばならない. 一般に, これらは, 大きなスピンを持つ場が c 数の外場中を伝搬する様子を調べる際に遭遇するものだ. それらの困難は, 理論の詳細に応じて, 因果律の破れ, 整合性の欠如, 非物理的質量の状態, ユニタリー性の破れなどだ. ここではこれらの問題の詳細に深入りしない. なぜなら, 以下の理由で, それらがこの章で説明した計算の枠組みとは無関係と思われるからだ.

(1) 場 $\psi_{ab}(x)$ はここでは物理的粒子の生成・消滅演算子から直接構成したので, 整合性の欠如や非物理的質量の状態の問題は生じ得ない. これらは自由粒子であるが, 相互作用表示での相互作用ハミルトニアン密度にそれらを組み込むことで, 摂動論を用いてクラスター分解原

理を自動的に満たす S 行列要素を計算できる. 相互作用ハミルトニアンがエルミートである限り, ユニタリー性の困難はあり得ない. ローレンツ不変性は摂動論では, 局所的だが共変的でない適当な項をハミルトニアン密度に付け加えさえすれば保証される. その厳密な証明はないが, これが常に可能であることを疑う理由はない. したがって高スピン粒子の困難は摂動論を越えようとしたときにのみ起こりうる.
(2) 13.6 節で議論するように, c 数の背景場が存在するときの場の方程式の解は (高スピン粒子の問題のすべてはこれに関連している), その結果が摂動級数の項の無限部分集合の和をとることに対応するという意味で, 実際摂動論を越えている. 弱い外場の場合でさえ, 場が十分ゆっくりと変化していて, エネルギー分母の小ささが場の弱さを埋め合わせるなら, この部分和は正当化される. しかしこの様にして得られた結果は, 高スピン粒子と外場との相互作用の詳細の全てに依存する. すなわち, 粒子の多重極モーメントばかりでなく, 外場に関して非線形な可能な相互作用項にも依存する. 高スピン粒子に関して報告された問題[15]は, 外場と非常に単純な相互作用しかしないと勝手に仮定した高スピン粒子についてだけ見出されている. 任意の相互作用についてもこの問題が起こることは誰も示していない. また, 12 章で見るように, 高スピン粒子は対称性の原理から許されるあらゆる可能な型の相互作用を持つことが期待される.
(3) 実際, 外場との相互作用が十分複雑なら高スピンの問題はなくなると信じる立派な理由がある. 一つは, 様々な安定な原子核やハドロンの共鳴状態を含めて, 高スピン粒子の存在は疑いないことだ. もし何らかの高スピンの問題が存在するとすれば, それは「点」粒子, すなわち, 外場との相互作用が特別に単純な粒子についてだけ存在し得る. 単純さの要求は, 我々が高スピン粒子を表現するのにどの場を選択するかに依存することに留意すべきだ. ある与えられた粒子の任意の自由場の型は, 任意の他の場の型に作用する微分演算子で表すこと

ができ, よって相互作用表示では外場との任意の相互作用は任意の勝手な場の型を用いて書ける. しかし 1 個の型の場で表したとき単純な相互作用は, 別の型の場で表すと複雑に見えるかもしれないのだ. だから単純さの要求には客観的内容が全くない.

(4) また, 高次元「カルツァ・クライン (Kaluza–Klein)」理論と弦理論はともに電磁背景場と相互作用するスピン 2 でゼロでない質量を持つ荷電粒子の矛盾のない理論の例になっている.[16] (理論の整合性は, 外場が場の方程式を満たして現実的である時にのみ成立することが見出された. これは以前の研究では一般に無視されていた点だ.) 相互作用表示でこれを再定式化すると, スピン 2 の粒子は $(1,1)$ 自由場で表現されるが, 上で述べたように, その相互作用は相互作用表示では回転群の $j=2$ 表現を含む任意の場の型 (A,B) で再表現できる.

5.8 CPT 定理

相対論を量子力学と結合させると反粒子の存在が要請されることをすでに見た. あらゆる粒子は反粒子 (純粋な中性粒子の場合それは自分自身だ) を持つ必要があるばかりでなく, 粒子と反粒子の性質の間には正確な関係がある. それは反転位相を適当に選ぶと, 全ての反転の積 CPT は保存されるとまとめられる. これが有名な CPT 定理だ.*

証明の第 1 段階として, 様々な型の自由場に積 CPT を施したときの効果を求めよう. スカラー, ベクトル, ディラック場について 5.2, 5.3, 5.5 節の結果より,

$$\mathsf{CPT}\ \phi(x)\ [\mathsf{CPT}]^{-1} = \zeta^*\xi^*\eta^*\phi^\dagger(-x)\ , \qquad (5.8.1)$$

*この定理を最初に証明したのはリューダース (Lüders) とパウリだ.[17] それは公理論的場の理論[18] で厳密に証明された. その手順は, 交換関係の仮定を用いて理論のローレンツ不変性を複素ローレンツ群に拡張し, 複素ローレンツ群を用いて場の積の真空期待値の鏡映性を証明し, 次にこの鏡映性を用いて場に CPT 変換を引き起こす反ユニタリー演算子の存在を示すというものだ.

$$\mathsf{CPT}\,\phi_\mu(x)\,[\mathsf{CPT}]^{-1} = -\zeta^*\xi^*\eta^*\phi^\dagger_\mu(-x)\,, \tag{5.8.2}$$

$$\mathsf{CPT}\,\psi(x)\,[\mathsf{CPT}]^{-1} = -\zeta^*\xi^*\eta^*\gamma_5\psi^*(-x) \tag{5.8.3}$$

だ. (もちろん, 位相 ζ, ξ, η は各々の場で記述される粒子の種類に依存する.) 全ての粒子について,

$$\zeta\xi\eta = 1 \tag{5.8.4}$$

となるように位相を選ぼう. するとスカラー場とベクトル場およびそれらの微分の任意の組み合わせから作られた任意のテンソル $\phi_{\mu_1\ldots\mu_n}$ は,

$$\mathsf{CPT}\,\phi_{\mu_1\ldots\mu_n}(x)\,[\mathsf{CPT}]^{-1} = (-)^n\phi^\dagger_{\mu_1\ldots\mu_n}(-x) \tag{5.8.5}$$

と変換する. (これらのテンソルに現れる任意の複素数の係数は, CPT が反ユニタリーなので, その複素共役に変換される.) 同じ変換則はディラック場の双 1 次結合から作られるテンソルについても成り立つことが容易にわかる. (5.8.3) をそのような双 1 次式に施すと,

$$\begin{aligned}\mathsf{CPT}[\bar\psi_1(x)M\psi_2(x)][\mathsf{CPT}]^{-1} &= \psi_1^T(-x)\gamma_5\beta M^*\gamma_5\psi_2^*(-x)\\ &= [\bar\psi_1(-x)\gamma_5 M\gamma_5\psi_2(-x)]^\dagger\end{aligned} \tag{5.8.6}$$

が得られる. (β と γ_5 の反交換性から来る負符号はフェルミオン演算子の反交換性から来る負符号と相殺する.) もし双 1 次式が n 階のテンソルなら, M は 2 を法として n 個のディラック行列の積だ. よって $\gamma_5 M\gamma_5 = (-1)^n M$ となり, したがって双 1 次式は (5.8.5) を満たす. .

エルミートなスカラー相互作用密度 $\mathcal{H}(x)$ は全部で偶数個の時空の添字を持つテンソルから作られなければならない. したがって,

$$\mathsf{CPT}\,\mathcal{H}(x)\,[\mathsf{CPT}]^{-1} = \mathcal{H}(-x) \tag{5.8.7}$$

となる. より一般的に (しかも幾分もっと簡単に), 斉次ローレンツ群の 1 個以上の一般的な既約表現に属する場 $\psi^{AB}_{ab}(x)$ から作られるエ

ルミート・スカラーについても, 同じことが成り立つことがわかる. そのような場への反転の効果についての前節の結果を総合すると,

$$\mathsf{CPT}\ \psi_{ab}^{AB}(x)\,[\mathsf{CPT}]^{-1} = (-1)^{2B}\psi_{ab}^{AB\dagger}(-x) \tag{5.8.8}$$

となる. (ディラック場については, (5.8.3) の行列 γ_5 により因子 $(-1)^{2B}$ が与えられる.) 積 $\psi_{a_1b_1}^{A_1B_1}(x)\,\psi_{a_2b_2}^{A_2B_2}(x)\cdots$ を結合してスカラー $\mathcal{H}(x)$ を作るためには, $A_1+A_2+\cdots$ と $B_1+B_2+\cdots$ の両方が整数である必要があり, よって $(-1)^{2B_1+2B_2+\cdots}=1$ となる. よってエルミート・スカラー $\mathcal{H}(x)$ は自動的に (5.8.7) を満たす.

(5.8.7) から直ちに CPT は相互作用 $V\equiv\int d^3x\,\mathcal{H}(\mathbf{x},0)$ と交換することが導かれる. つまり,

$$\mathsf{CPT}\ V\,[\mathsf{CPT}]^{-1} = V \tag{5.8.9}$$

だ. また, 任意の理論で CPT は自由粒子ハミルトニアン H_0 と交換する. したがって, 演算子 CPT は, ここではその自由粒子演算子への作用により定義してきたが, 3.3 節で説明したとおりに「in」および「out」状態に作用する. この対称性原理の物理的結論はすでに 3.3 節と 3.6 節で説明した.

5.9 質量ゼロ粒子の場

ここまではゼロでない質量を持つ粒子の場のみを取り扱ってきた. これらの場の内, 5.2 節と 5.5 節で議論したスカラー場やディラック場のような幾つかの場については, 質量ゼロの極限に移行するのに何ら特別な問題はない. 他方, 5.3 節で見たようにスピン 1 の粒子に対するベクトル場の質量ゼロ極限をとる際には, この極限で偏極ベクトルの少なくとも一つが発散するという困難が存在する. 実際, この節で, スピン $j\geq 1$ の物理的な質量ゼロ粒子の生成・消滅演算子は, 有限質量

の場合には構成できる既約な (A,B) 場の全てを構成するのには使えないことを見る. この場の型に関する特別な制限により, 自然にゲージ不変性の導入に導かれる.

質量がゼロでない粒子の場合と全く同様にして, 質量ゼロ粒子の一般的な自由場を, 運動量 $\mathbf{p}$ とヘリシティ σ を持つ粒子の消滅演算子 $a(\mathbf{p},\sigma)$ および対応する反粒子の生成演算子 $a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma)$ の線形結合,

$$\psi_\ell(x) = (2\pi)^{-3/2}\int d^3p \sum_\sigma \Big[\kappa\, a(\mathbf{p},\sigma)u_\ell(\mathbf{p},\sigma)\, e^{ip\cdot x} + \lambda\, a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma)v_\ell(\mathbf{p},\sigma)\, e^{-ip\cdot x}\Big] \qquad (5.9.1)$$

として構成してみよう.* ここで $p^0 \equiv |\mathbf{p}|$ だ. 生成演算子はちょうど (2.5.42) の 1 粒子状態のように,

$$U(\Lambda)a^\dagger(\mathbf{p},\sigma)U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\ \exp\Big(i\sigma\theta(p,\Lambda)\Big)a^\dagger(\mathbf{p}_\Lambda,\sigma)\ , \qquad (5.9.2)$$

$$U(\Lambda)a^{c\dagger}(\mathbf{p},\sigma)U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\ \exp\Big(i\sigma\theta(p,\Lambda)\Big)a^{c\dagger}(\mathbf{p}_\Lambda,\sigma), \qquad (5.9.3)$$

したがってまた,

$$U(\Lambda)a(\mathbf{p},\sigma)U^{-1}(\Lambda) = \sqrt{\frac{(\Lambda p)^0}{p^0}}\ \exp\Big(-i\sigma\theta(p,\Lambda)\Big)a(\mathbf{p}_\Lambda,\sigma) \qquad (5.9.4)$$

と変換する. ここで $p_\Lambda \equiv \Lambda p$, また θ は (2.5.43) で定義された角度だ. よって場が斉次ローレンツ群の表現 $D(\Lambda)$ に従って,

$$U(\Lambda)\psi_\ell(x)U^{-1}(\Lambda) = \sum_{\bar\ell} D_{\ell\bar\ell}(\Lambda^{-1})\psi_{\bar\ell}(\Lambda x) \qquad (5.9.5)$$

と変換するようにしたいなら, 係数関数 u と v が (5.1.19) と (5.1.20) の代わりに, (再び $p_\Lambda \equiv \Lambda p$ として),

$$u_{\bar\ell}(\mathbf{p}_\Lambda,\sigma)\ \exp\Big(i\sigma\theta(p,\Lambda)\Big) = \sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}}\sum_\ell D_{\bar\ell\ell}(\Lambda)u_\ell(\mathbf{p},\sigma)\ , \qquad (5.9.6)$$

---

*ここでは 1 種類の粒子のみを扱い, 種類の添字 n を省略する. また, κ と λ は定数係数で, 因果律の要求と係数関数 u_ℓ と v_ℓ の規格化の便利な選択から決定される.

$$v_{\bar{\ell}}(\mathbf{p}_\Lambda,\sigma)\ \exp\Big(-i\sigma\theta(p,\Lambda)\Big)=\sqrt{\frac{p^0}{(\Lambda p)^0}}\sum_\ell D_{\bar{\ell}\ell}(\Lambda)v_\ell(\mathbf{p},\sigma) \tag{5.9.7}$$

の関係を満たすようにとらねばならない. 有限質量粒子の場合のように, これらの関係は ((5.1.21) と (5.1.22) の代わりに),

$$u_{\bar{\ell}}(\mathbf{p},\sigma)=\sqrt{\frac{|\mathbf{k}|}{p^0}}\sum_{\bar{\ell}} D_{\bar{\ell}\ell}\,(\mathcal{L}(p))\,u_\ell(\mathbf{k},\sigma)\ , \tag{5.9.8}$$

$$v_{\bar{\ell}}(\mathbf{p},\sigma)=\sqrt{\frac{|\mathbf{k}|}{p^0}}\sum_{\bar{\ell}} D_{\bar{\ell}\ell}\,(\mathcal{L}(p))\,v_\ell(\mathbf{k},\sigma) \tag{5.9.9}$$

と置くことで満足させることができる. ここで $\mathbf{k}$ は例えば $(0,0,k)$ の基準運動量, また $\mathcal{L}(p)$ は質量ゼロ粒子を運動量 $\mathbf{k}$ から運動量 $\mathbf{p}$ に移す基準ローレンツ変換だ. また, (5.1.23) と (5.1.24) の代わりに, 基準運動量での係数関数は,

$$u_{\bar{\ell}}(\mathbf{k},\sigma)\ \exp\Big(i\sigma\theta(k,W)\Big)=\sum_\ell D_{\bar{\ell}\ell}(W)u_\ell(\mathbf{k},\sigma)\ , \tag{5.9.10}$$

$$v_{\bar{\ell}}(\mathbf{k},\sigma)\ \exp\Big(-i\sigma\theta(k,W)\Big)=\sum_\ell D_{\bar{\ell}\ell}(W)v_\ell(\mathbf{k},\sigma) \tag{5.9.11}$$

を満たさねばならない. ここで $W^\mu{}_\nu$ は 4 元運動量 $k=(\mathbf{k},|\mathbf{k}|)$ の「小群」の任意の元, すなわちこの 4 元運動量を不変に保つ任意のローレンツ変換だ.

(2.5.28) の小群の 2 種類の元を別々に考察することで, (5.9.10) と (5.9.11) の内容を引き出せる. (2.5.27) で与えられる z 軸まわりの角度 θ の回転 $R(\theta)$,

$$R^\mu{}_\nu(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

に対して (5.9.10) と (5.9.11) から,

$$u_{\bar{\ell}}(\mathbf{k},\sigma)e^{i\sigma\theta} = \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}\Big(R(\theta)\Big)u_{\ell}(\mathbf{k},\sigma) \quad , \tag{5.9.12}$$

$$v_{\bar{\ell}}(\mathbf{k},\sigma)e^{-i\sigma\theta} = \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}\Big(R(\theta)\Big)v_{\ell}(\mathbf{k},\sigma) \tag{5.9.13}$$

が得られる. (2.5.26) で与えられる $x-y$ 面内の回転とブーストの組み合わせ $S(\alpha,\beta)$,

$$S^{\mu}{}_{\nu}(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & 1 & -\beta & \beta \\ \alpha & \beta & 1-\gamma & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma & 1+\gamma \end{bmatrix} ,$$
$$\gamma \equiv (\alpha^2+\beta^2)/2$$

に対して (5.9.10) と (5.9.11) より,

$$u_{\bar{\ell}}(\mathbf{k},\sigma) = \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}\Big(S(\alpha,\beta)\Big)u_{\ell}(\mathbf{k},\sigma) \quad , \tag{5.9.14}$$

$$v_{\bar{\ell}}(\mathbf{k},\sigma) = \sum_{\ell} D_{\bar{\ell}\ell}\Big(S(\alpha,\beta)\Big)v_{\ell}(\mathbf{k},\sigma) \tag{5.9.15}$$

が得られる. (5.9.12)–(5.9.15) は基準運動量 $\mathbf{k}$ での係数関数 u と v を決定する条件だ. そして (5.9.8) と (5.9.9) が任意の運動量での係数関数を与える. v についての方程式はちょうど u についての方程式の複素共役なので, 定数 κ と λ を適当に調整すれば係数関数を,

$$v_{\ell}(\mathbf{p},\sigma) = u_{\ell}(\mathbf{p},\sigma)^* \tag{5.9.16}$$

となるように規格化できる. 問題は, 斉次ローレンツ群の一般の表現に対して, (5.9.14) を満たす u_{ℓ} を求めることができないことだ. これは, $m \neq 0$ の場合には与えられたヘリシティの粒子に対する場を構成することが可能な表現についてさえ, できない.

ここで何が問題かを知るために, ヘリシティ ±1 の質量ゼロ粒子に対する 4 元ベクトル $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 場を構成してみよう. 4 元ベクトル表現では単に,

$$D^\mu{}_\nu(\Lambda) = \Lambda^\mu{}_\nu$$

だ. ここでの係数関数 u_μ は「偏極ベクトル (polarization vector)」e_μ を用いて,

$$u_\mu(\mathbf{p},\sigma) \equiv (2p^0)^{-1/2}\, e_\mu(\mathbf{p},\sigma) \tag{5.9.17}$$

と書くのが慣習であるが, そうすると (5.9.8) より,

$$e^\mu(\mathbf{p},\sigma) = \mathcal{L}(\mathbf{p})^\mu{}_\nu e^\nu(\mathbf{k},\sigma) \tag{5.9.18}$$

が得られる. また (5.9.12) と (5.9.14) はここでは,

$$e^\mu(\mathbf{k},\sigma)\, e^{i\sigma\theta} = R(\theta)^\mu{}_\nu e^\nu(\mathbf{k},\sigma)\ , \tag{5.9.19}$$

$$e^\mu(\mathbf{k},\sigma) = S(\alpha,\beta)^\mu{}_\nu e^\nu(\mathbf{k},\sigma) \tag{5.9.20}$$

となる. (5.9.19) は (係数 κ と λ に吸収できる定数を除いて),

$$e^\mu(\mathbf{k},\pm 1) = (1,\pm i,0,0)/\sqrt{2} \tag{5.9.21}$$

を要求する. しかしそうすると (5.9.20) はまた $\alpha \pm i\beta = 0$ を要求するが, それは一般の実数の α,β については不可能だ. したがって基本的な要求 (5.9.14) と (5.9.10) は満たせない. その代わりここでは,

$$\begin{aligned} D^\mu{}_\nu\Big(W(\theta,\alpha,\beta)\Big)e^\nu(\mathbf{k},\pm 1) &= S^\mu{}_\lambda(\alpha,\beta)R^\lambda{}_\nu(\theta)e^\nu(\mathbf{k},\pm 1) \\ &= \exp\,(\pm i\theta)\left\{e^\mu(\mathbf{k},\pm 1) + \frac{(\alpha \pm i\beta)}{\sqrt{2}|\mathbf{k}|}k^\mu\right\} \end{aligned} \tag{5.9.22}$$

が得られる. このようにして, 質量ゼロでヘリシティ ±1 の粒子の消滅・生成演算子から 4 元ベクトル場を構成することはできないという結論に帰着する.

とりあえずこの困難には目をつぶって，とにかく先に進むことにしよう．(5.9.18) と (5.9.21) を用いて任意の運動量に対する偏極ベクトルを定義し，場を，

$$a_\mu(x) = \int d^3p\,(2\pi)^{-3/2}(2p^0)^{-1/2}$$
$$\times \sum_{\sigma=\pm 1}\left[e_\mu(\mathbf{p},\sigma)e^{ip\cdot x}a(\mathbf{p},\sigma) + e_\mu(\mathbf{p},\sigma)^* e^{-ip\cdot x}a^{c\dagger}(\mathbf{p},-\sigma)\right] \tag{5.9.23}$$

ととる．後で，そのような場を物理理論の構成要素としてどのように用いることができるのかの考察に戻ろう．

場 (5.9.23) はもちろん，

$$\Box a^\mu(x) = 0 \tag{5.9.24}$$

を満たす．場のその他の性質は偏極ベクトルの性質から導かれる．(偏極ベクトルのこれらの性質は，後で量子電磁理論に行ったときに必要になる.) 質量ゼロ粒子の運動量を $\mathbf{k}$ から $\mathbf{p}$ に移すローレンツ変換 $\mathcal{L}(p)$ は，粒子のエネルギーを $|\mathbf{k}|$ から $|\mathbf{p}|$ に移す z 軸に沿った「ブースト」$\mathcal{B}(|\mathbf{p}|)$ とそれに引き続く z 軸を $\mathbf{p}$ の方向に移す基準化された回転 $R(\hat{\mathbf{p}})$ として書ける．$e^\nu(\mathbf{k},\pm 1)$ は x および y 成分のみを持つ純粋に空間的なベクトルなので，z 軸に沿ったブーストの影響を受けず，よって，

$$e^\mu(\mathbf{p},\pm 1) = R(\hat{\mathbf{p}})^\mu{}_\nu\, e^\nu(\mathbf{k},\pm 1) \tag{5.9.25}$$

だ．特に，$e^0(\mathbf{k},\pm 1) = 0$ および $\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}(\mathbf{k},\pm 1) = 0$ なので，

$$e^0(\mathbf{p},\pm 1) = 0 \tag{5.9.26}$$

および，

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}(\mathbf{p},\pm 1) = 0 \tag{5.9.27}$$

だ．これより，

$$a^0(x) = 0 \tag{5.9.28}$$

および,

$$\nabla \cdot \mathbf{a}(x) = 0 \tag{5.9.29}$$

が導かれる. 9 章で見るように, これらは, 電磁理論の真空のベクトル・ポテンシャルがクーロン・ゲージまたは輻射ゲージと呼ばれるゲージで満たす条件だ.

全てのローレンツ系で a^0 がゼロになる事実は, a^μ が 4 元ベクトルにはなれないことを鮮明に表している. その代わり (5.9.22) は, 一般の運動量 $\mathbf{p}$ と一般のローレンツ変換 Λ に対して, (5.9.6) に代わって,

$$e^\mu(\mathbf{p}_\Lambda, \pm 1)\exp\left(\pm i\theta(\mathbf{p}, \Lambda)\right) = D^\mu{}_\nu(\Lambda)\, e^\nu(\mathbf{p}, \pm 1) + p^\mu \Omega_\pm(\mathbf{p}, \Lambda) \tag{5.9.30}$$

が得られ, よって一般のローレンツ変換のもとで,

$$U(\Lambda) a_\mu(x) U^{-1}(\Lambda) = \Lambda^\nu{}_\mu a_\nu(\Lambda x) + \partial_\mu \Omega(x, \Lambda) \tag{5.9.31}$$

となることを示している. ここで $\Omega(x, \Lambda)$ は消滅演算子と生成演算子の線形結合で, その正確な形はここでは重要ではない. 8 章でより詳しく見るように, もし $a^\mu(x)$ の結合が形式的にローレンツ不変 (すなわち, $a^\mu \to \Lambda^\mu{}_\nu\, a^\nu$ なる変換を引き起こす形式的なローレンツ変換のもとで不変) なだけでなく, 「ゲージ」変換 $a_\mu \to a_\mu + \partial_\mu \Omega$ のもとでも不変ならば, $a^\mu(x)$ のような場をローレンツ不変な物理理論の構成要素として用いることができる. このことは, j^μ を $\partial_\mu j^\mu = 0$ を満たす 4 元ベクトル・カレントとして, a_μ の結合を $a_\mu j^\mu$ の形にとることで達成される.

ヘリシティ ±1 の質量ゼロ粒子に対する通常の 4 元ベクトル場は存在しないが, そのような粒子に対する反対称テンソル場を構成するには何の問題もない. (5.9.22) と小群のもとでの k^μ の不変性からただちに,

$$D^\mu{}_\rho\Big(W(\theta, \alpha, \beta)\Big) D^\nu{}_\sigma\Big(W(\theta, \alpha, \beta)\Big)\Big(k^\rho e^\sigma(\mathbf{k}, \pm 1) - k^\sigma e^\rho(\mathbf{k}, \pm 1)\Big)$$

$$= e^{\pm i\theta}\Big(k^\mu e^\nu(\mathbf{k},\pm 1) - k^\nu e^\mu(\mathbf{k},\pm 1)\Big) \tag{5.9.32}$$

がわかる. これは, 斉次ローレンツ群の反対称テンソル表現の場合の式 (5.9.6) を満たす係数関数が (適当に規格化を選べば),

$$u_{\mu\nu}(\mathbf{p},\pm 1) = i(2\pi)^{-3/2}(2p^0)^{-3/2}\left[p^\mu e^\nu(\mathbf{p},\pm 1) - p^\nu e^\mu(\mathbf{p},\pm 1)\ \right] \tag{5.9.33}$$

であることを示している. ここで $e^\mu(\mathbf{p},\pm 1)$ は (5.9.25) で与えられる. これと (5.9.23) を合わせると, ヘリシティ ±1 の質量ゼロ粒子に対する一般の反対称テンソル場が,

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu \tag{5.9.34}$$

の形で与えられる. a^μ は 4 元ベクトルではないが, (5.9.31) の余分な項は (5.9.34) では落ちるので, $f_{\mu\nu}$ はテンソルである. また, (5.9.34), (5.9.24), (5.9.28), (5.9.29) より $f^{\mu\nu}$ は真空のマックスウェル方程式,

$$\partial_\mu f^{\mu\nu} = 0\ , \tag{5.9.35}$$

$$\epsilon^{\rho\sigma\mu\nu}\partial_\sigma f_{\mu\nu} = 0 \tag{5.9.36}$$

を満たす.

テンソル場の交換関係を計算するには双 1 次形式 $e^\mu e^{\nu *}$ のヘリシティに関する和が必要だ. 陽な式 (5.9.21) より,

$$\sum_{\sigma=\pm 1} e^i(\mathbf{k},\sigma) e^j(\mathbf{k},\sigma)^* = \delta_{ij} - \frac{k^i k^j}{|\mathbf{k}|^2}$$

が得られ, よって (5.9.25) を用いれば,

$$\sum_{\sigma=\pm 1} e^i(\mathbf{p},\sigma) e^j(\mathbf{p},\sigma)^* = \delta_{ij} - \frac{p^i p^j}{|\mathbf{p}|^2} \tag{5.9.37}$$

が得られる. すると簡単な計算により,

$$[f_{\mu\nu}(x)\,,\,f_{\rho\sigma}(y)^\dagger] = (2\pi)^{-3} \\ \times[-\eta_{\mu\rho}\partial_\nu\partial_\sigma+\eta_{\nu\rho}\partial_\mu\partial_\sigma+\eta_{\mu\sigma}\partial_\nu\partial_\rho-\eta_{\nu\sigma}\partial_\mu\partial_\rho] \\ \times\int d^3p(2p^0)^{-1}\left[|\kappa|^2e^{ip\cdot x}-|\lambda|^2e^{-ip\cdot x}\right] \tag{5.9.38}$$

が得られる. これは明らかに,

$$|\kappa|^2=|\lambda|^2 \tag{5.9.39}$$

ならば, そしてそのときに限り, $x^0=y^0$ に対してゼロになる. その場合, $f_{\mu\nu}$ がテンソルなので交換子は全ての空間的距離についてもゼロになる. (5.9.39) はまた, a^μ の交換子が同時刻でゼロになることも意味し, 8 章で見るように, これは S 行列のローレンツ不変性を生み出すのに十分だ. 生成演算子と消滅演算子の相対位相は $\kappa=\lambda$ となるように調節でき, そうすると, 光子の場合のように, 粒子が自分自身の荷電共役粒子であるなら, 場はエルミートだ.

スピン 1 の質量ゼロ粒子の理論を構成するに際して, なぜ, $f^{\mu\nu}(x)$ のような簡単なローレンツ変換性を持つ場で満足せず, $a^\mu(x)$ のような場を使おうとするのだろうか? (5.9.34) の微分の存在は, $f_{\mu\nu}$ とその微分だけから構成される相互作用密度は, ベクトル場 a_μ を使った相互作用密度に比べて, 質量ゼロ粒子の小さいエネルギーと運動量に対して行列要素がより急激にゼロになることを意味する. そのような理論の相互作用は遠距離で同様に急激に小さくなり, それは通常の逆 2 乗則より速く減衰する. これは全く可能なことだ. しかし, 質量ゼロでスピン 1 の粒子に対するベクトル場を用いたゲージ不変な理論は, より一般的な部類の理論を表し, 実際に自然界で実現している理論を含む.

同様なことが, 重力子 (graviton) すなわちヘリシティ ±2 の質量ゼロ粒子についても当てはまる. そのような粒子の消滅・生成演算子か

ら, リーマン・クリストフェル (Riemann–Christoffel) の曲率テンソル (curvature tensor) の代数的性質を持つテンソル $R_{\mu\nu\rho\tau}$ を構成できる. その性質とは, μ, ν および ρ, σ の各対の中では反対称で, 対の間では対称だということだ. しかし, 通常の逆 2 乗則の重力相互作用を組み入れるには, 一般相対論における一般座標変換に関連した 1 種のゲージ変換を除けば, 対称テンソルとして変換する場 $h_{\mu\nu}$ を導入する必要がある. このように遠距離相互作用が組み込まれたヘリシティ ± 2 の質量ゼロ粒子の理論を構成するには, それが一般共変性のような何らかの対称性を持つ必要がある. 電磁相互作用のゲージ不変性の場合と同様に, これを達成するには, 場を, 今の場合は 2 個の時空の添字を持ち $\partial_\mu \theta^{\mu\nu} = 0$ を満たす保存「カレント」$\theta^{\mu\nu}$ と結合させればよい. 唯一のそのような保存テンソルは, 作り出される力の遠距離での振舞いに影響しない可能な全微分項を除いて, エネルギー・運動量テンソルだ.** スピン $j \geq 3$ の質量ゼロ粒子の場は 3 個以上の時空添字を持つ保存テンソルに結合しなければならないが, 全微分項を除けばそのような場は存在しない. よって, 高スピンの質量ゼロ粒子は長距離力を生み出せない.

* * *

ヘリシティ ± 1 の 4 元ベクトル場あるいはヘリシティ ± 2 の対称テンソル場を構成する際に出くわした問題は, もっと一般的な制限の特別の場合にすぎない. このことを見るために, 斉次ローレンツ群の任意の表現に属する質量ゼロ粒子の場を構成する方法を考察しよう. 5.6 節で見たように, 斉次ローレンツ群の任意の表現 $D(\Lambda)$ は $(2A+1)(2B+1)$ 次元表現 (A, B) に分解でき, その表現に対する斉次ローレンツ群の

**もし $\theta^{\mu_1\cdots\mu_N}$ が $\partial_{\mu_1}\theta^{\mu_1\cdots\mu_N} = 0$ を満たすテンソル・カレントなら, $\int d^3x\, \theta^{0\mu_2\cdots\mu_N}$ は $N-1$ 階テンソルのように変換する保存量だ. そのような唯一の保存テンソルは, 様々な連続対称性に付随するスカラー「チャージ」と, エネルギー・運動量 4 元ベクトルだ. 他のどのような 4 元ベクトルあるいは高階テンソルの保存も, 前方衝突以外の全ての衝突を禁止することになる.

生成子は, $\mathbf{J}^{(j)}$ をスピン j の角運動量行列として,

$$(\mathcal{J}_{ij})_{a'b',ab} = \epsilon_{ijk}\left[(J_k^{(A)})_{a'a}\,\delta_{b'b} + (J_k{}^{(B)})_{b'b}\,\delta_{a'a}\right],$$
$$(\mathcal{J}_{i0})_{a'b',ab} = -i\left[(J_k^{(A)})_{a'a}\,\delta_{b'b} - (J_k{}^{(B)})_{b'b}\,\delta_{a'a}\right]$$

で表される. 微小な θ の場合, $D(R(\theta)) = 1 + i\mathcal{J}_{23}\theta$ なので, (5.9.12) と (5.9.13) より,

$$\sigma u_{ab}(\mathbf{k},\sigma) = (a+b)u_{ab}(\mathbf{k},\sigma)\,,$$

$$-\sigma v_{ab}(\mathbf{k},\sigma) = (a+b)v_{ab}(\mathbf{k},\sigma)$$

となり, よって, $u_{ab}(\mathbf{k},\sigma)$ と $v_{ab}(\mathbf{k},\sigma)$ はそれぞれ $\sigma = a+b$ と $\sigma = -a-b$ でなければゼロになる. また, (5.9.14) で α と β を微小にすると,

$$\begin{aligned}
0 &= (\mathcal{J}_{31} + \mathcal{J}_{01})_{ab,a'b'}\ u_{a'b'}(\mathbf{k},\sigma)\\
&= (J_2^{(A)} + iJ_1^{(A)})_{aa'}u_{a'b}(\mathbf{k},\sigma) + (J_2^{(B)} - iJ_1^{(B)})_{bb'}u_{ab'}(\mathbf{k},\sigma)\,,\\
0 &= (\mathcal{J}_{32} + \mathcal{J}_{02})_{ab,a'b'}\ u_{a'b'}(\mathbf{k},\sigma)\\
&= (-J_1^{(A)} + iJ_2^{(A)})_{aa'}u_{a'b}(\mathbf{k},\sigma) + (-J_1^{(B)} - iJ_2^{(B)})_{bb'}u_{ab'}(\mathbf{k},\sigma)
\end{aligned}$$

あるいはもっと簡単に,

$$\left(J_1^{(A)} - i\,J_2^{(A)}\right)_{aa'}\,u_{a'b}(\mathbf{k},\sigma) = 0\,,$$
$$\left(J_1^{(B)} + i\,J_2^{(B)}\right)_{bb'}\,u_{ab'}(\mathbf{k},\sigma) = 0$$

が得られる. これらは,

$$a = -A,\quad b = \ +B \tag{5.9.40}$$

でなければ $u_{ab}(\mathbf{k},\sigma)$ がゼロになることを要求する. また, 同じことが明らかに $v_{ab}(\mathbf{k},\sigma)$ についても成り立つ. これをまとめると, 型 (A,B) の場は,

$$\sigma = B - A \tag{5.9.41}$$

として, ヘリシティ σ の質量ゼロ粒子の消滅演算子とヘリシティ $-\sigma$ の反粒子の生成演算子のみから作ることができることがわかる.

例えば, 質量ゼロ粒子のディラック場の $(\frac{1}{2},0)$ と $(0,\frac{1}{2})$ の部分はそれぞれヘリシティ $-\frac{1}{2}$ と $+\frac{1}{2}$ の粒子を消滅させ, それぞれヘリシティ $+\frac{1}{2}$ と $-\frac{1}{2}$ の反粒子を生成する. ニュートリノの「2 成分」理論では, $(\frac{1}{2},0)$ 場とその共役場のみが存在し得るので, この理論ではニュートリノはヘリシティ $-\frac{1}{2}$ を持ち反ニュートリノはヘリシティ $+\frac{1}{2}$ を持つ.

5.7 節と同じ方法で, スピン j (すなわちヘリシティ $\mp j$) の質量ゼロ粒子に対する $(j,0)$ と $(0,j)$ 場は, (5.9.1) の消滅項と生成項の係数が (5.9.39) を満たせば, 空間的な距離でお互い同士およびその共役場と交換することを示せる. すると, 消滅演算子と生成演算子の相対位相を調整して, これらの係数を等しくできる. 型 $(A,A+j)$ または $(B+j,B)$ でスピン j を持つ質量ゼロ粒子の場は, それぞれちょうど型 $(0,j)$ または $(j,0)$ の場の $2A$ 次または $2B$ 次微分であることが簡単にわかる. よって, これらのより一般的な場についてここで別途考察する必要はない.

今や, ヘリシティ ± 1 の質量ゼロ粒子のベクトル場を構成することが不可能だった理由が理解できる. ベクトル場は $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 表現に従って変換し, よって (5.9.19) よりヘリシティゼロ粒子のみを記述できる. (もちろん, ヘリシティゼロのベクトルを構成することは可能だ. それは単に質量ゼロのスカラー場 ϕ の微分 $\partial_\mu \phi$ をとればよい.) 最も簡単なヘリシティ ± 1 の共変な質量ゼロの場はローレンツ変換の型 $(1,0)\oplus(0,1)$ を持つ. すなわち, それは反対称テンソル $f_{\mu\nu}$ だ. 同様に, 最も簡単なヘリシティ ± 2 の共変な質量ゼロの場はローレンツ変換の型 $(2,0)\oplus(0,2)$ を持つ. すなわち, それはリーマン・クロストフェルの曲率テンソルのように添字の各対の中では反対称で二つの対の間では対称な 4 階テンソルだ.

前節での反転 P, C, T の議論は, 明白な修正だけすれば質量ゼロの

場合にも当てはまる.

問題

1. ゼロ運動量の係数関数が条件 (5.1.23) と (5.1.24) を満たすなら, 任意の運動量の係数関数 (5.1.21) と (5.1.22) は定義条件 (5.1.19) と (5.1.20) を満たすことを示せ.

2. スピン $\frac{3}{2}$ と質量 $m \neq 0$ を持つ自己荷電共役粒子を消滅および生成させる自由場 $\psi^{\mu}_{\ell}(x)$ を考える. この場がローレンツ変換のもとで余分な 4 元ベクトルの添字 μ を持つディラック場 ψ_{ℓ} と同様に変換するように, この場の消滅演算子 $a(\mathbf{p},\sigma)$ に掛かる係数関数 $u^{\mu}_{\ell}(\mathbf{p},\sigma)$ を計算する方法を示せ. この場はどのような場の方程式と代数的条件および実条件を満足するか? ($p^2 = -m^2$ の場合に)

$$\sum_{\sigma} u^{\mu}_{\ell}(\mathbf{p},\sigma) u^{\nu}_{m}{}^{*}(\mathbf{p},\sigma) \equiv (2p^0)^{-1} P^{\mu\nu}_{\ell m}(p)$$

で定義される行列要素 $P^{\mu\nu}(p)$ を求めよ. この場の交換関係はどうなっているか? この場は反転 P, C, T のもとでどのように変換するか?

3. $h^{\mu\nu}(x) = h^{\nu\mu}(x)$ と $h^{\mu}{}_{\mu}(x) = 0$ を満たしスピン 2 と質量 $m \neq 0$ を持つ粒子を消滅・生成させる自由場 $h^{\mu\nu}(x)$ を考える. この場がローレンツ変換のもとでテンソルと同様に変換するように, この場の消滅演算子 $a(\mathbf{p},\sigma)$ に掛かる係数関数 $u^{\mu\nu}(\mathbf{p},\sigma)$ の計算方法を示せ. この場はどのような場の方程式を満たすか?

$$\sum_{\sigma} u^{\mu\nu}(\mathbf{p},\sigma) u^{\kappa\lambda *}(\mathbf{p},\sigma) \equiv (2p^0)^{-1} P^{\mu\nu,\kappa\lambda}(p)$$

で定義される関数 $P^{\mu\nu,\kappa\lambda}(p)$ を求めよ．この場の交換関係はどうなっているか? この場は反転 P, C, T のもとでどのように変換するか?

4. スピン j で型 $(A, A+j)$ または $(B+j, B)$ の質量ゼロ粒子の場は, それぞれ型 $(0, j)$ または $(j, 0)$ の場の $2A$ 階または $2B$ 階微分であることを示せ.

5. ヘリシティ $\pm j$ の質量ゼロ粒子について、変換型 $(j, 0)+(0, j)$ の場の, 反転 P, C, T のもとでの変換性を求めよ.

6. 斉次ローレンツ群の $(j, 0)+(0, j)$ 表現に従って変換する一般化されたディラック場 ψ を考える．ψ と $\psi^\dagger$ の成分の積から作れるテンソルを挙げよ．その結果を $j=\frac{1}{2}$ についてこの章で見た結果と照合せよ.

7. 斉次ローレンツ群の (A, B) 表現に従って変換し, スピン j と質量 $m \neq 0$ を持つ粒子を記述する一般の場 ψ_{ab} を考える．それが,

$$V=\int d^3x\,[\psi_{ab}(x)J^{ab}(x)+J^{ab\dagger}(x)\psi^\dagger_{ab}(x)]$$

の型の相互作用ハミルトニアンを持つとする．ここで J^{ab} は c 数の外部カレントとする．エネルギー $E \gg m$ と特定のヘリシティでの, これらの粒子を放出する行列要素の漸近的振舞いはどうなっているか? (カレントのフーリエ変換は異なる a, b について同じ程度の大きさでその値は E に強くは依存しないと仮定せよ.)

参考文献

1. この章で採用した観点は一連の論文, S. Weinberg, *Phys. Rev.* **133**, B1318 (1964); **134**, B882 (1964); **138**, B988 (1965); **181**, 1893 (1969) で提示された. 同様の方法はウィチマン (E. Wichmann) の未発表講義で採用されている.

2. N. Bohr and L. Rosenfeld, *Kgl. Danske Vidensk. Selskab Mat.-Fys. Medd.*, No. 12 (1933) (*Selected Papers of Leon Rosenfeld*, R. S. Cohen and J. Stachel 編 (Reidel, Dordrecht, 1979) に英訳がある); *Phys. Rev.* **78**, 794 (1950).

3. P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* (London) **A117**, 610 (1928).

4. E. Cartan, *Bull. Soc. Math. France* **41**, 53 (1913).

5. 例えば, J. M. Jauch and F. Rohrlich, *The Theory of Photons and Electrons* (Addison-Wesley, Cambridge, MA, 1955) Appendix A2; H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics* (Benjamin–Cummings, Reading, MA, 1982) pp. 15, 198 (ジョージアイ著「物理学におけるリー代数－アイソスピンから統一理論へ－」九後汰一郎訳, 吉岡書店) を見よ. オリジナルの文献は I. Schur, *Sitz. Preuss. Akad.*, p. 406 (1905) だ.

6. 例えば, H. Georgi, *Lie Algebras in Particle Physics* (Benjamin/Cummings, Reading, MA, 1982) pp. 15, 198 (ジョージアイ著「物理学におけるリー代数－アイソスピンから統一理論へ－」九後汰一郎訳, 吉岡書店) を見よ. オリジナルの文献は I. Schur, *Sitz. Preuss. Akad.*, p. 406 (1905) だ.

7. T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **104**, 254 (1956).

8. 例えば, B. L. van der Waerden, *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik* (Springer Verlag, Berlin, 1932); G. Ya. Lyubarski, *The Applications of Group Theory in Physics*, S. Dedijer 訳 (Pergamon Press, New York, 1960) を見よ.

9. W. Rarita and J. Schwinger, *Phys. Rev.* **60**, 61 (1941).

10. 例えば, A. R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, Princeton, 1957) 3 章を見よ.

11. S. Weinberg, *Phys. Rev.* **181**, 1893 (1969), 5 節.

12. M. Fierz, *Helv. Phys. Acta* **12**, 3 (1939); W. Pauli, *Phys. Rev.* **58**, 716 (1940). 公理論的場の理論における非摂動論的証明は G. Lüders and B. Zumino, *Phys. Rev.* **110**, 1450 (1958) および N. Burgoyne, *Nuovo Cimento* **8**, 807 (1958) で与えられた. また, R. F. Streater and A. S. Wightman, *PCT, Spin & Statistics, and All That* (Benjamin, New York, 1968) を見よ.

13. $(j,0)+(0,j)$ 表現の場は H. Joos, *Fortschr. Phys.* **10**, 65 (1962); S. Weinberg, *Phys. Rev.* **133**, B1318 (1964) で導入された.

14. A. R. Edmonds, 参考文献 10, あるいは M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum* (John Wiley & Sons, New York, 1957) 3 章 (ローズ著「角運動量の基礎理論」山内恭彦, 森田正人訳, みすず書房).

15. G. Velo and D. Zwanziger, *Phys. Rev.* **186**, 1337 (1969); **188**, 2218 (1969); A. S. Wightman, *Proceedings of the Fifth Coral Gables Conference on Symmetry Principles at High Energy*, T. Gudehus, G. Kaiser, and A. Perlmutter 編 (Gordon and Breach,

New York, 1969); B. Schroer, R. Seiler, and J. A. Swieca, *Phys. Rev.* D **2**, 2927 (1970); およびそれらに引用されている他の文献.

16. C. R. Nappi and L. Witten, *Phys. Rev.* D **40**, 1095 (1989); P. C. Argyres and C. R. Nappi, *Phys. Lett.* **B224**, 89 (1989).

17. G. Lüders, *Kong. Dansk. Vid. Selskab, Mat.-Fys. Medd.* **28**, 5 (1954); *Ann. Phys.* **2**, 1 (1957); W. Pauli, *Nuovo Cimento* **6**, 204 (1957). リューダースが最初に反転間の関係を考察したときは, まだ P が保存すると一般に考えられていたので, 彼の定理では C の保存は T 不変性と同等だと記述されている.

18. R. Jost, *Helv. Phys. Acta* **30**, 409 (1957); F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **110**, 579 (1958). また Streater and Wightman, 参考文献 12 も見よ.

第6章

ファインマン則

これまでの章では, S 行列がローレンツ不変性とクラスター分解原理を満たすようにハミルトニアン密度を構成するためには, 共変自由場が必要となるのをみた. このように構成したハミルトニアン密度を使えば, どの形式の摂動論を使って S 行列を計算しても, これらの不変性とクラスター原理は相互作用密度の各次数で満たされている. しかし, 計算の各過程で S 行列のローレンツ不変性とクラスター分解性が明白な摂動論を使う方が明らかに便利だ. これらの性質は, 3.5 節のはじめに述べた 1930 年代に使われていまでは「旧式の摂動論」と呼ばれている摂動論では成立していない. 1940 年代後半のファインマン, シュウィンガー, 朝永の偉大な業績は, ローレンツ不変性とクラスター分解性が常に自明な S 行列の摂動的計算法を開発したことだ. この章では, ファインマンによって 1948 年のポコノス会議で初めて発表されたダイアグラム的な計算法を概観する. ファインマンは, 彼自身が開発した経路積分法にも助けられてこのダイアグラム則にたどり付いたが, これは 9 章で扱う. この章では, ダイソンが 1949 年に発表したやり方を使う. この方法は, 1970 年代まで, 場の量子論の全ての摂動的解析の基礎をなし, いまでも, ファインマン則の説明として非常に

わかりやすいものだ.

6.1　ファインマン則の導出

出発点はダイソン級数 (3.5.10) を自由粒子状態の表現 (4.2.2) と組み合わせて得られる S 行列の次の表式だ.

$$
\begin{aligned}
&S_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1 n'_1;\,\mathbf{p}'_2\sigma'_2 n'_2;\,\cdots\,,\;\mathbf{p}_1\sigma_1 n_1;\,\mathbf{p}_2\sigma_2 n_2;\,\cdots} \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-i)^N}{N!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_N \Big(\Phi_0, \cdots a(\mathbf{p}'_2\sigma'_2 n'_2)\, a(\mathbf{p}'_1\sigma'_1 n'_1) \\
&\quad \times T\Big\{\mathcal{H}(x_1)\cdots\mathcal{H}(x_N)\Big\} a^\dagger(\mathbf{p}_1\sigma_1 n_1)\, a^\dagger(\mathbf{p}_2\sigma_2 n_2)\cdots\Phi_0\Big)\ . \qquad (6.1.1)
\end{aligned}
$$

以下のことを思い出そう. $\mathbf{p}$, σ, n はそれぞれ粒子の運動量, スピン, 種類の添字だ. プライム ($'$) は終状態の粒子の添字であることを意味する. Φ_0 は自由粒子の真空であり, a と $a^\dagger$ はそれぞれ消滅・生成演算子だ. また, Tは $\mathcal{H}(x)$ の変数 x^0 が左から右に減少する時間順序積を意味する. $\mathcal{H}(x)$ は相互作用ハミルトニアン密度で, 次のように場とその共役場の多項式になっている.

$$
\mathcal{H}(x) = \sum_i g_i \mathcal{H}_i(x)\ . \qquad (6.1.2)
$$

各項 $\mathcal{H}_i$ は各種の場と共役場のある個数の積となっている. 種類 n の粒子の場は, 斉次ローレンツ群 (空間反転を含む場合も含まない場合もある) のもとである表現をなしている.

$$
\begin{aligned}
\psi_\ell(x) = \sum_\sigma (2\pi)^{-3/2} \int d^3p\, \Big[&u_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)\ a(\mathbf{p},\sigma,n)\, e^{ip\cdot x} \\
&+ v_\ell(\mathbf{p},\sigma,n)\, a^\dagger(\mathbf{p},\sigma,n^c)\, e^{-ip\cdot x}\Big]\ . \qquad (6.1.3)
\end{aligned}
$$

ここで, n^c は種類 n の粒子の反粒子を意味し, $\exp(\pm ip\cdot x)$ は p^0 を $\sqrt{\mathbf{p}^2+m_n^2}$ に等しくして計算したものだ. 係数関数 u_ℓ と v_ℓ はそれ

が表す粒子のスピンと場のローレンツ変換性に依存していて, 5 章で求めてある. (例えば, スカラー場ではエネルギー E の粒子の u_ℓ は, 単に $(2E)^{-1/2}$だ. また, ディラック場では, u_ℓ と v_ℓ は 5.5 節で導入した規格化されたディラックスピノルだ.) 場の添字 ℓ はここでは, 粒子の種類, 場が変換するローレンツ群の表現および, その表現の成分を意味する. 場の微分を含む相互作用を別に扱う必要はない. 我々の見方では, 場 (6.1.3) の微分は, 異なる u_ℓ と v_ℓ を持つ (6.1.3) によって表される単なる別の場だ. ここで, 電子, 陽子のように任意的に「粒子」と呼んでいる種類の粒子と陽電子や反陽子のように「反粒子」と呼んでいる粒子を, 区別することにする. 粒子を消滅させ, 反粒子を生成する場の演算子は単に「場」と呼ばれ, それに共役で, 反粒子を消滅し, 粒子を生成する場は「共役場」と呼ばれる. もちろん, 光子や π^0 などのような自分自身の反粒子になっている粒子もあり, これらの共役場は場に比例する.

ここで, (6.1.1) で全ての消滅演算子を右に動かす. その際には以下の交換関係または反交換関係を繰り返し使う.

$$a(\mathbf{p}\ \sigma\ n)a^\dagger(\mathbf{p}'\sigma'n') = \pm a^\dagger(\mathbf{p}'\sigma'n')a(\mathbf{p}\ \sigma\ n) + \delta^3(\mathbf{p}'-\mathbf{p})\delta_{\sigma'\sigma}\delta_{n'n}\ , \tag{6.1.4}$$

$$a(\mathbf{p}\ \sigma\ n)a(\mathbf{p}'\sigma'n') = \pm a(\mathbf{p}'\sigma'n')a(\mathbf{p}\ \sigma\ n)\ , \tag{6.1.5}$$

$$a^\dagger(\mathbf{p}\ \sigma\ n)a^\dagger(\mathbf{p}'\sigma'n') = \pm a^\dagger(\mathbf{p}'\sigma'n')a^\dagger(\mathbf{p}\ \sigma\ n)\ . \tag{6.1.6}$$

(反粒子についても同じだ.) 上の式で, 右辺の $\pm$ の符号は, もし粒子 n, n' が共にフェルミオンなら $-$ で, それらのうちどちらか一方, または共にボソンなら $+$ だ. 一番右に消滅演算子が (または一番左に生成演算子が) きたときには, その演算子が以下のように真空を消すので (6.1.1) への寄与はゼロとなる.

$$a(\mathbf{p}\ \sigma\ n)\,\Phi_0 = 0\ , \tag{6.1.7}$$

$$\Phi_0^\dagger\, a^\dagger(\mathbf{p}\,\sigma\,n) = 0. \tag{6.1.8}$$

(6.1.1) に残った寄与は, 始状態, 終状態, それに相互作用ハミルトニアン密度からの全ての生成演算子と消滅演算子を, 他の消滅演算子と生成演算子と対にしてできる (6.1.4) の右辺のデルタ関数項からのものだ.

これにより, (6.1.1) の多項式 $\mathcal{H}(\psi(x), \psi^\dagger(x))$ の項 $\mathcal{H}_i$ のある次数での寄与は, 以下の因子の積の積分を全ての生成・消滅演算子の対の取り方についての和をとったものだ.[2]

(a) 量子数 $\mathbf{p}', \sigma', n'$ の終状態の粒子と $\mathcal{H}_i(x)$ の中の共役場 $\psi_\ell^\dagger(x)$ の対は以下の因子を与える.

$$\Big[a(\mathbf{p}'\,\sigma' n'),\, \psi_\ell^\dagger(x)\Big]_\mp = (2\pi)^{-3/2} e^{-ip'\cdot x} u_\ell^*(\mathbf{p}'\sigma' n')\,. \tag{6.1.9}$$

(b) 量子数 $\mathbf{p}', \sigma', n'^c$ の終状態の反粒子と $\mathcal{H}_i(x)$ の場 $\psi_\ell(x)$ の対は以下の因子を与える.

$$\Big[a(\mathbf{p}'\sigma'\,n'^c), \psi_\ell(x)\Big]_\mp = (2\pi)^{-3/2} e^{-ip'\cdot x} v_\ell(\mathbf{p}'\sigma'\,n')\,. \tag{6.1.10}$$

(c) 量子数 $\mathbf{p}, \sigma, n$ の始状態の粒子と $\mathcal{H}_i(x)$ の場 $\psi_\ell(x)$ の対は以下の因子を与える.

$$\Big[\psi_\ell(x), a^\dagger(\mathbf{p}\sigma n)\Big]_\mp = (2\pi)^{-3/2} e^{ip\cdot x} u_\ell(\mathbf{p}\sigma n)\,. \tag{6.1.11}$$

(d) 量子数 $\mathbf{p}, \sigma, n^c$ の始状態の反粒子と $\mathcal{H}_i(x)$ の共役場 $\psi_\ell^\dagger(x)$ の対は以下の因子を与える.

$$\Big[\psi_\ell^\dagger(x), a^\dagger(\mathbf{p}\;\sigma\;n^c)\Big]_\mp = (2\pi)^{-3/2} e^{ip\cdot x} v_\ell^*(\mathbf{p}\;\sigma\;n)\,. \tag{6.1.12}$$

(e) 量子数 $\mathbf{p}', \sigma', n'$ の終状態の粒子 (または反粒子) と量子数 $\mathbf{p}, \sigma, n$ の始状態の粒子 (または反粒子) の対は以下の因子を与える.

$$\Big[a(\mathbf{p}'\sigma' n'), a^\dagger(\mathbf{p}\;\sigma\;n)\Big]_\mp = \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\delta_{\sigma'\sigma}\delta_{n'n}\,. \tag{6.1.13}$$

(f) $\mathcal{H}_i(x)$ の場 $\psi_\ell(x)$ と $\mathcal{H}_j(y)$ の場 $\psi^\dagger_m(y)$ の対は以下の因子を与える.*

$$\theta(x-y)\Big[\psi^+_\ell(x),\psi^{+\dagger}_m(y)\Big]_\mp \pm\theta(y-x)\Big[\psi^{-\dagger}_m(y),\psi^-_\ell(x)\Big]_\mp \equiv -i\,\Delta_{\ell m}(x,y)\ . \tag{6.1.14}$$

ここで, ψ^+ と ψ^- はそれぞれ, 次の ψ の粒子を消滅させる項と反粒子を生成する項だ.

$$\psi^+_\ell(x) = (2\pi)^{-3/2}\int d^3p\sum_\sigma u_\ell(\mathbf{p}\,\sigma\,n)\,e^{ip\cdot x}a(\mathbf{p}\,\sigma\,n)\ , \tag{6.1.15}$$

$$\psi^-_\ell(x) = (2\pi)^{-3/2}\int d^3p\sum_\sigma v_\ell(\mathbf{p}\,\sigma\,n)\,e^{-ip\cdot x}a^\dagger(\mathbf{p}\,\sigma\,n^c)\ . \tag{6.1.16}$$

$\theta(x-y)$ は階段関数であり, $x^0>y^0$ で $+1$, $x^0<y^0$ でゼロであることを思い出そう. これらの階段関数は(6.1.1) の時間順序積のために(6.1.14)に現れる. $\mathcal{H}(x)$ の消滅場 $\psi^+(x)$ と $\mathcal{H}(y)$ の生成場 $\psi^{+\dagger}(y)$ の対は, $\mathcal{H}(x)$ が当初 (6.1.1) で $\mathcal{H}(y)$ の左にあるとき, つまり $x^0>y^0$ のときに限り現れる. 同様に, $\mathcal{H}(y)$ の消滅場 $\psi^{-\dagger}(y)$ と $\mathcal{H}(x)$ の生成場 $\psi^-(x)$ の対は, $\mathcal{H}(y)$ が当初(6.1.1) で $\mathcal{H}(x)$ の左にあるとき, つまり $y^0>x^0$ のときに限り現れる. ((6.1.14) の第2項の ± の符号については少し後で説明する.) (6.1.14) の量は**プロパゲーター** (propagator) として知られている. これは次節で計算する.

S 行列はこれらの因子の積と後で述べる数因子をかけ, $x_1\cdots x_N$ について積分し, 全ての対の取り方についてと各相互作用の個数について和をとって得られる. 詳細を述べる前に, これらの対の取り方をたどるためのダイアグラム形式を述べておくのが便利だ.

S 行列を計算する法則は**ファインマン則** (Feynman diagram) として便利にまとめられている. (図6.1を見よ.) ダイアグラムは $\mathcal{H}_i(x)$

---

*もし相互作用 $\mathcal{H}(x)$ が(5.1.33)のように正規順序積で与えられていれば, 同じ相互作用の中の場と共役場の対は発生しない. そうでなければ, $\Delta_{\ell m}(0)$ に意味を与えるために, 何らかの正規化が必要となる.

を表す**頂点** (vertex) と呼ばれる点と, 生成・消滅演算子の対を表す**線** (line) からなっている. それらは, 以下の性質を持つ.

(a)　ある $\mathcal{H}(x)$ の中の共役場と終状態の粒子との対は, その $\mathcal{H}(x)$ を表す頂点からダイアグラムの上へ出て行き, 上向きの矢印を持つ線で表される.

(b)　ある $\mathcal{H}(x)$ の場と終状態の反粒子との対は , その $\mathcal{H}(x)$ を表す頂点からダイアグラムを上へ出て行き, 下向きの矢印を持つ線で表される. (γ, π^0などのように自分自身の反粒子になっている粒子については矢印は省略する.)

(c)　ある $\mathcal{H}(x)$ の中の場と始状態の粒子との対は, ダイアグラムの下から入ってきて, その $\mathcal{H}(x)$ を表す頂点に終り, 上向きの矢印を持つ線で表される.

(d)　ある $\mathcal{H}(x)$ の中の共役場と始状態の反粒子との対は, ダイアグラムの下から入ってきて, その $\mathcal{H}(x)$ を表す頂点に終り, 下向きの矢印を持つ線で表される.

(e)　終状態の粒子か反粒子と始状態の粒子か反粒子との対は, どの頂点も通らずに, ダイアグラムの下から上まで抜ける線で表される. 矢印の向きは, 粒子は上向き, 反粒子は下向きだ.

(f)　$\mathcal{H}(x)$ の場と $\mathcal{H}(y)$ の共役場の対は, $\mathcal{H}(x)$ と $\mathcal{H}(y)$ を表す頂点を結び, y から x へ向いた矢印を持つ線で表される.

矢印は常に, 粒子が動いている方向および, 反粒子が動いているのと反対の方向を向いていることに注意しよう. (上で述べたように, 光子のように自分自身の反粒子になっている粒子については矢印は書かない.) 法則 (f) で述べた矢印の方向は, これと矛盾がない. なぜなら, $\mathcal{H}_j(y)$ の共役場が作った粒子を $\mathcal{H}_i(x)$ の場が消滅させるか, $\mathcal{H}_i(x)$ の場が作った反粒子を $\mathcal{H}_j(y)$ の共役場が消滅させるかだからだ. $\mathcal{H}_i(x)$ の全ての場と共役場は何かと対にならなければならないので, (6.1.2)

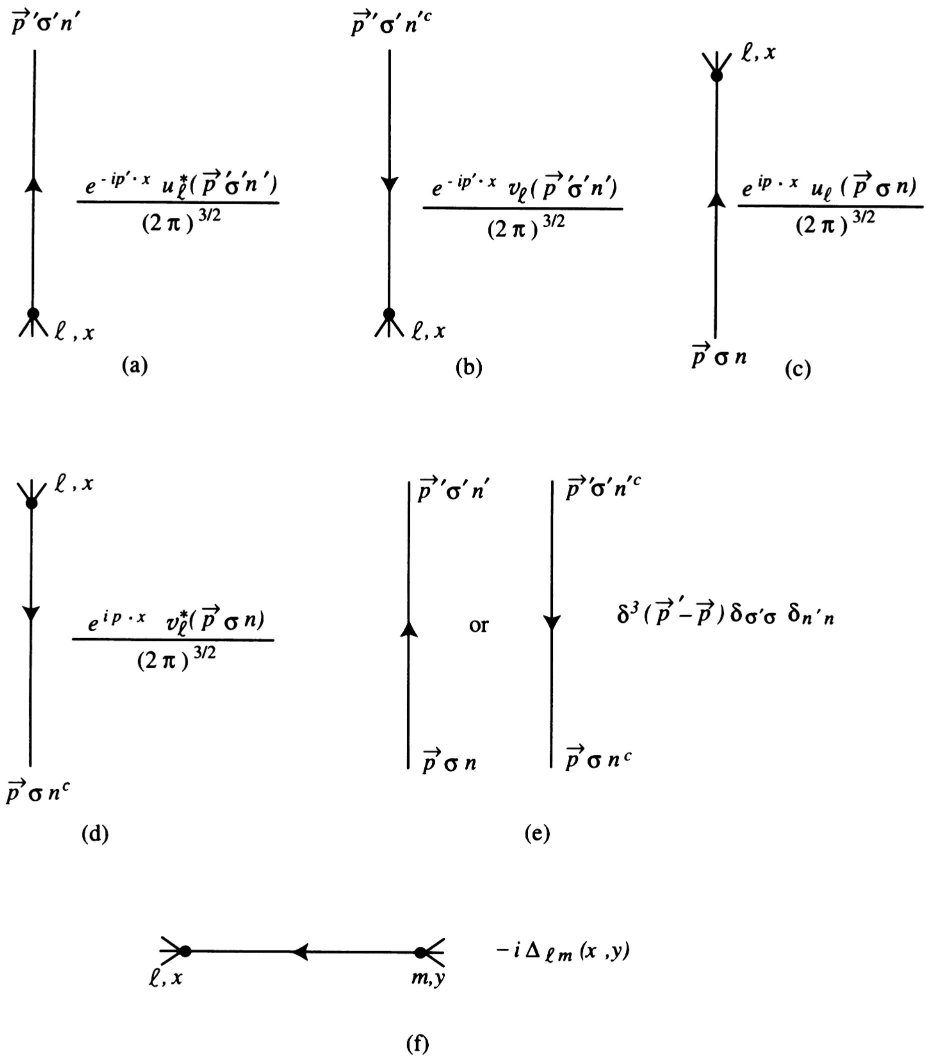


図 6.1: S 行列の座標空間での計算における演算子対のグラフ的表現. 右側の表式はファインマン・ダイアグラムのそれぞれの線について, S 行列の座標空間積分に含まれる因子だ.

の $\mathcal{H}_i(x)$ の項に相当する i 種の頂点は $\mathcal{H}_i(x)$ の場と共役場の個数にちょうど等しい本数の線を持つ．これらの線のうち，頂点に入る向きと出る向きの矢印を持つ線の数は，それぞれ，その相互作用項の場と共役場の数に等しい．

(6.1.2) の相互作用項 $\mathcal{H}_i(x)$ をそれぞれ N_i 個ずつ持つ S 行列への寄与は，以下のように計算される．

(i) i 種の頂点を N_i 個持ち，始状態の各粒子と反粒子に相当した線がダイアグラムに下から入り，終状態の各粒子と反粒子に相当した線がダイアグラムから上に出ていき，各頂点に必要な数だけの線が付与されるように頂点間を内線で結ぶファインマン・ダイアグラムをすべて書く．線は全て上に述べた方向を持ち，上か下かを向いている．各頂点は相互作用の種類 i と時空の座標 x^μ を持つ．各外線と内線は，頂点に付いているところで場の種類 ℓ (これはその頂点で粒子か反粒子を生成・消滅させる場 $\psi_\ell(x)$ か $\psi_\ell^\dagger(x)$ に相当する) の添字を持つ．また，各外線は，ダイアグラムに出入りするところでその始状態か終状態の粒子 (または反粒子) の量子数 $\mathbf{p}, \sigma, n$ か $\mathbf{p}', \sigma', n'$ の添字を持つ．

(ii) i 種の頂点は，因子 $-i$ (これは (6.1.1) の $(-i)^N$ から来る) と，因子 g_i ($\mathcal{H}_i(x)$ にかかる相互作用定数) を持つ．ダイアグラムを上向きに出て行く線は，矢印が上向きか下向きかによってそれぞれ因子 (6.1.9) か (6.1.10) をともなう．同様に，ダイアグラムに下から入ってくる線は，矢印の向きによって因子 (6.1.11) か (6.1.12) がともなう．ダイアグラムを通り抜ける線には因子 (6.1.13) が，頂点をつなぐ内線には因子 (6.1.14) がともなう．

(iii) これらの因子全ての積を各頂点の座標 $x_1, x_2, \cdots$ について積分する．

(iv) 各ファインマン・ダイアグラムからこのようにして得られた結果を足し上げる．S 行列の摂動級数は，各次で相互作用の種類につい

て足し上げ, それを腕力の限り高い次数まで計算して得られる.

これらの法則には (6.1.1) の因子 $1/N!$ を含めなかった. これは, (6.1.1) の時間順序積が $x_1x_2\cdots x_N$の $N!$ 個の置換についての和であり, 各置換は最終結果に同じ寄与を与えるからだ. これを言い換えると, N 個の頂点を持つあるファインマン・ダイアグラムは頂点の置換でのみ異なる $N!$ 個の同一のファインマン・ダイアグラムの一つであり, これにより $N!$ の因子が出て, (6.1.1) の因子 $1/N!$が消される. (この法則には後で述べる例外もある.) このため, 以下では, 頂点の添字付けのみ異なるファインマン・ダイアグラムは二つ以上は含めない.

場合によっては, 各ファインマン・ダイアグラムの寄与に, 組み合わせの因子と符号も入れる必要がある. これは以下のように得られる.

(v) 相互作用 $\mathcal{H}_i(x)$ が (他の場と共役場以外に) 同じ場を因子として M 個含んでいたとしよう. これらの場がそれぞれ異なる相互作用か始状態, 終状態の共役場と対になったとする. これらの共役場の最初のものは, $\mathcal{H}_i(x)$ の M 個の同一の場のどれとも対になれる. 2 番目の共役場は残る $M-1$ 個の同一の場のどれとも対になれる, というように続く. これは余分な因子 $M!$ を生じる. これを打ち消すために, M 個の同一の場 (または共役場) を含む $\mathcal{H}_i(x)$ の相互作用定数 g_i には因子 $1/M!$ が含まれるように定義するのが普通だ. 例えば, スカラー場 $\phi(x)$ の M 次の相互作用は $g\phi^M/M!$ と書かれる. (より一般的には, ある対称性の同じ多重項に属する場を M 個含む相互作用や, これかまたは他の理由で M 個のボソンかフェルミオンの置換について相互作用定数が対称か反対称になっているときには, しばしば $1/M!$ の因子を含める.)

しかし, この $M!$ の因子は常に完全に打ち消されるわけではない. 例えば, ある相互作用 $\mathcal{H}_i(x)$ の M 個の同一の場が他の一つの相互作用 $\mathcal{H}_j(y)$ の M 個の対応する共役場と対になる場合を考える. (図 6.2

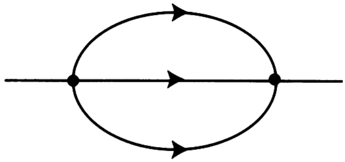


図 6.2: S 行列に余分な因子を必要とするダイアグラムの例. 例えば, 同じ場三つ (と他の場) を含む相互作用では, 通常, 相互作用ハミルトニアンに因子 $1/3!$ を入れて, 他の相互作用項の対応する共役場と対をとるときに現れる因子を打ち消すようにする. しかし, このダイアグラムでは $1/3!$ の因子が二つ現れるが, $3!$ 個の異なる対の取り方しかないので, 余分な $1/3!$ の因子が残る.

を見よ.) このとき, 上の解析にしたがうと, $M!$個の異なる対の取り方しかない. (これは最初にどの共役場を取り, 次にどれを取り, ... ということに差異がないからだ.) これは二つの相互作用項からくる二つの $1/M!$ のうちの一つしか打消さない. この場合には, そのようなファインマン・ダイアグラムの寄与に「手で」余分な因子 $1/M!$ を入れなければならない.

他に, 頂点の置換がファインマン・ダイアグラムに影響しない時にも組み合わせ因子がでる. 前に, (6.1.1) の級数の因子 $1/N!$ は通常, N 個の頂点の添字付けのみ異なる N 個のダイアグラムのせいで打消されると述べた. しかし, 頂点の添字を付け替えても新しいダイアグラムが得られないときには, この打ち消しは不完全になる. これは, 2 次の相互作用 $\mathcal{H} = \psi_\ell^\dagger M_{\ell\ell'}\psi_{\ell'}$ を持つ理論での真空の間の S 行列の計算で顕著に見られる. ここで, M は外場に依存してよい. (そのような真空の摂動ダイアグラムの物理的な重要性については 3・4 巻 (原著 II 巻) で詳細に述べる.) $\mathcal{H}$ について N 次のファインマン・ダイアグラ

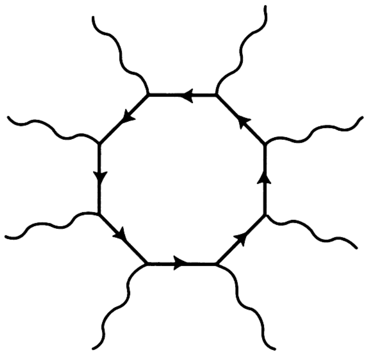


図 6.3: 外場とのみ相互作用する粒子の真空間遷移振幅に寄与する 8 次のダイアグラム. このダイアグラムでは, 外場は波線で表されている. このようなダイアグラムは, 頂点の添字の付け方のみ異なる場合の数, つまり 7! 個ある. これに輪を回転させるだけの添字の付替えは考えない. (6.1.1) のダイソン公式の因子 1/8! は完全には打消されず, 1/8 が余分な因子となって残る.

ムは N 個の角を持った輪だ. (図 6.3 を見よ.) このようなダイアグラムでは, それぞれの頂点の添字を輪に沿って隣の頂点に動かす置換は同じダイアグラムになるから, 異なるダイアグラムは $(N-1)!$ 個しかない. したがって, そのようなダイアグラムは以下の因子を持つ.

$$\frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N}. \tag{6.1.17}$$

(vi) フェルミオン場を含む理論では, (6.1.4)–(6.1.6) を使って, 生成・消滅演算子を左・右に動かすと, それぞれの対の寄与に負の符号がでる. より詳細には, (6.1.1) で全ての対の演算子を隣り合わせに (消滅演算子を生成演算子のすぐ左に) 置くために必要な置換が奇数個のフェルミオン演算子の交換を含むならば負の符号がでる. (これはある対の取り方の寄与を計算するには, まず (6.1.1) で, 消滅演算子を全て,

それと対にならない演算子との交換・反交換関係を無視して, それと対になる生成演算子のすぐ左に持ってきて, 次に対になった演算子の積をそれらの交換子または反交換子で置き換えればよいからだ.) これは, フェルミオンのプロパゲーター (6.1.14) の二つの項の間の相対的な負の符号を与える. $\mathcal{H}(x)$ の場の消滅部分 $\psi^{+}(x)$ がどのような置換によって $\mathcal{H}(y)$ の共役場の生成部分 $\psi^{+\dagger}(y)$ のすぐ左に持ってこられようと, 共役場の消滅部分 $\psi^{-\dagger}(y)$ を場の生成部分 $\psi^{-}(x)$ のすぐ左に持ってくる置換はフェルミオン演算子の交換を一つ余分に持ち, (6.1.14) の第2項の負の符号を生じる.

以上に加えて, ファインマン・ダイアグラム全体に負の符号がかかることがある. たとえば, フェルミオンの相互作用が,

$$\mathcal{H}(x) = \sum_{\ell mk} g_{\ell mk} \psi_{\ell}^{\dagger}(x)\psi_m(x)\phi_k(x) \tag{6.1.18}$$

のみである理論を考える. ここで, $g_{\ell mk}$ は一般の定数, $\psi_\ell(x)$ は複素フェルミオン場の集合, $\phi_m(x)$ は実ボソン (スカラーとは限らない) 場の集合とする. (量子電磁理論のみならず, 弱・電磁・強相互作用の「標準模型」でもフェルミオンの相互作用は全てこの形に書ける.) まずフェルミオン・フェルミオン散乱過程 $12 \to 1'2'$を $\mathcal{H}$について2次で考える. (6.1.1) の2次の項で, フェルミオン演算子は (自明な省略をして)

$$a(2')a(1')\psi^{\dagger}(x)\psi(x)\psi^{\dagger}(y)\psi(y)a^{\dagger}(1)a^{\dagger}(2) \tag{6.1.19}$$

という順序で現れる. この次数では, 対の取り方,

$$[a(2')\psi^{\dagger}(x)]\ [a(1')\psi^{\dagger}(y)]\ [\psi(y)a^{\dagger}(1)]\ [\psi(x)a^{\dagger}(2)] \tag{6.1.20}$$

と

$$[a(1')\psi^{\dagger}(x)]\ [a(2')\psi^{\dagger}(y)]\ [\psi(y)a^{\dagger}(1)]\ [\psi(x)a^{\dagger}(2)] \tag{6.1.21}$$

に相当して二つの連結ダイアグラムがある. (図6.4を見よ.) (6.1.19)

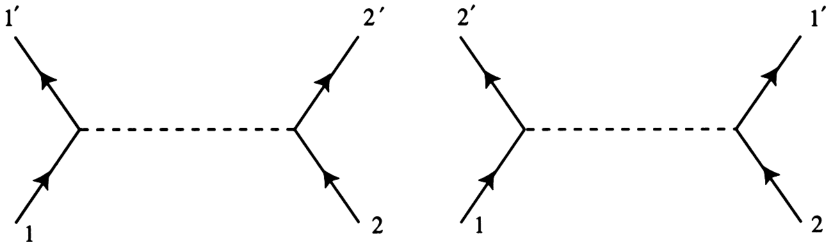


図 6.4: (6.1.18) の相互作用を持つ理論でのフェルミオン・フェルミオン散乱の 2 次の連結ダイアグラム. ここで, 直線はフェルミオンを表し, 点線は中性ボソンを表す. これらの二つのダイアグラムの寄与は, 2 番目のダイアグラムで表される対の取り方が余分にフェルミオン演算子の交換を含んでいるために起きる負の符号の分だけ異なる.

から (6.1.20) に進むには, フェルミオン演算子の遇数個の置換が必要だ. (例えば, $\psi(x)$ を三つの演算子を越えて右に動かし, 次に $a(1')$ を一つの演算子を越えて右に動かす.) したがって, (6.1.20) の取り方では余分な負の因子はない. S 行列の全体の符号は遷移確率に影響しないし, これはまた始状態と終状態の符号の定義にもよるから, これ自身は重要ではない. 重要なのは, 対の取り方 (6.1.20) と (6.1.21) とでは, フェルミオン演算子 $a(1')$ と $a(2')$ とが交換された分だけ異なることから最も簡単にわかるように, 符号が異なるということだ. 実際, この負の符号は散乱振幅を $1'$ と $2'$ (または, 1 と 2) の交換のもとで反対称にし, フェルミ統計からちょうど必要とされるものだ.

しかしながら, このような符号因子は, 摂動論の最低次でさえ, 全て始状態か終状態の反対称性と簡単な関係にあると考えてはならない. これを示すために, 同じ相互作用 (6.1.18) のもとでの 2 次のフェルミオン・フェルミオン散乱 $1\,2^c \to 1'2'^c$ を考える. (6.1.1) の 2 次の項で

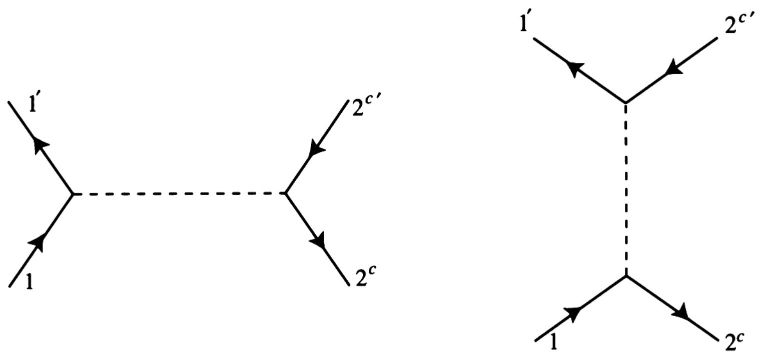


図 6.5: (6.1.18) の相互作用を持つ理論でのフェルミオン・反フェルミオン散乱の連結 2 次ダイアグラム. ここで, 直線は矢印の方向によってフェルミオンか反フェルミオンを表し, 点線は中性ボソンを表す. これらの二つのダイアグラムには, 第二のダイアグラムで表される対の取り方に余分なフェルミオン演算子の交換が一つ含まれているために, 相対的に負の符号がある.

フェルミオン演算子は次の順序で現れる.

$$a(2^{'c})a(1')\psi^\dagger(x)\psi(x)\psi^\dagger(y)\psi(y)a^\dagger(1)a^\dagger(2^c)\quad . \tag{6.1.22}$$

ここでも, この次数で,

$$[a(2^{'c})\psi(x)]\ [a(1')\psi^\dagger(x)]\ [\psi(y)a^\dagger(1)]\ [\psi^\dagger(y)a^\dagger(2^c)] \tag{6.1.23}$$

と

$$[a(2^{'c})\psi(x)]\ [a(1')\psi^\dagger(y)]\ [\psi(y)a^\dagger(1)]\ [\psi^\dagger(x)a^\dagger(2^c)] \tag{6.1.24}$$

に相当する二つのファインマン・ダイアグラムがある. (図 6.5 を見よ.) (6.1.22) から (6.1.23) を得るにはフェルミオン演算子を偶数回置換する (例えば, $\psi(x)$ を二つの演算子を越えて左に動かし, $\psi^\dagger(y)$ を二つの演算子を越えて右に動かす). したがって, (6.1.23) の対の取り方に

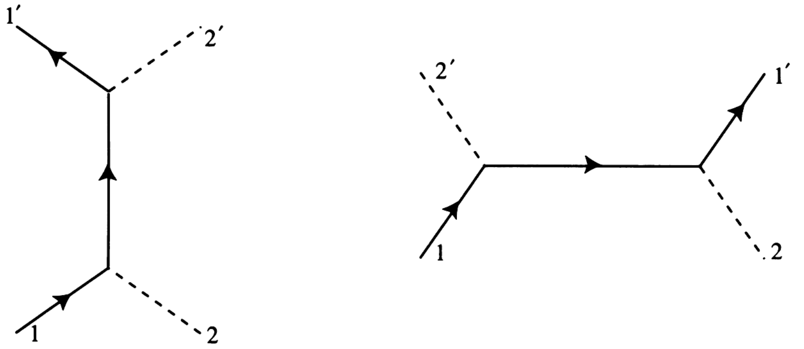


図 6.6: (6.1.18) の相互作用を持つ理論でのボソン・フェルミオン散乱の 2 次の連結ダイアグラム. 直線はフェルミオンで, 破線は中性ボソン.

は負の因子はでない. 一方, (6.1.22) から (6.1.24) を得るにはフェルミオン演算子を奇数回置換する ((6.1.23) と同じ操作の後, それに加えて $\psi^\dagger(x)$ と $\psi^\dagger(y)$ を交換する). したがって, この対の取り方では余分な負の符号がでる.**

より高い次数の寄与を考えるとさらに符号因子がでてくる. ここで考えた, フェルミオンが全て (6.1.18) の形の相互作用をする理論では, 一般的なファインマン・ダイアグラムで, フェルミオンの線は, 図 6.6 のようにボソン場と任意の回数の相互作用をしてダイアグラムを通り抜ける線分の鎖となっているか, 図 6.7 のようにフェルミオン・ループを形作る. 任意の過程で, ファインマン・ダイアグラムに M個の角を

**実際には, この符号はフェルミ統計の要請とは全く無関係ではない. 同じ場が粒子を消滅させ, 反粒子を生成するから, 「交差対称性」(crossing symmetry) と呼ばれる, 始状態の粒子か反粒子を終状態の反粒子か粒子と交換する対称性が存在する. 特に, $1\,2^c \to 1'2'^c$ の過程は, 「交差した」過程 $1\,2' \to 1'2$ と関係している. 二つの対の取り方, (6.1.23) と (6.1.24) は, この過程の二つのダイアグラムに対応して, 1 と 2′ (または 1′ と 2) の交換で入れ替わる. よって, 始状態 (または終状態) の粒子の交換での散乱振幅の反対称性から自然にこれらの寄与の符号が異なることが要請される. しかし, 交差対称性は通常の対称性ではない (力学変数の解析接続が必要となる) から, 一般的な過程で正確に使うことは難しい.

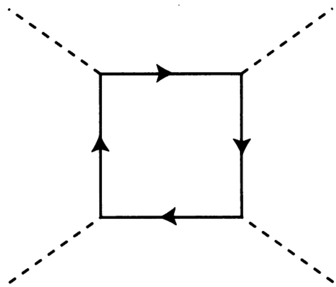


図 6.7: (6.1.18) の相互作用を持つ理論でのボソン・ボソン散乱の最低次の連結ダイアグラム. このようなフェルミオン・ループは対になったフェルミオン場の置換から来る余分な負の符号を持つ.

持つフェルミオン・ループを付け加えることを考えよう. これは以下のフェルミオン演算子の対の取り方に対応している.

$$[\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)]\,[\psi(x_2)\bar{\psi}(x_3)]\cdots[\psi(x_M)\bar{\psi}(x_1)]\,. \tag{6.1.25}$$

一方, これらの演算子は (6.1.1) に以下の順序で現れる.

$$\bar{\psi}(x_1)\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)\psi(x_2)\cdots\bar{\psi}(x_M)\psi(x_M)\,. \tag{6.1.26}$$

(6.1.26) から (6.1.25) を得るには, フェルミオン演算子の奇数回の置換が必要だ ($\bar{\psi}(x_1)$ を $2M-1$ 個の演算子を越えて動かす). したがって, そのようなフェルミオン・ループの各々は負の符号をともなう.

これらの法則により, いろいろな粒子のクラスターが時空の大きく離れた領域で相互作用する過程の寄与も含んだ完全な S 行列が得られる. 4 章で論じたように, そのような寄与を除いた S 行列部分を計算するには, 連結ファインマン・ダイアグラムのみを含めばよい. 特に, これにより, ダイアグラムを相互作用せずに通り抜けて (6.1.13) の因子を与える線は排除される.

ファインマン則を完全に明確にするために, 以下で二つの異なる理論について粒子散乱の S 行列への最低次の寄与を計算する.

理論 I

フェルミオンと自己荷電共役なボソンとが (6.1.18) の相互作用をする理論を考える. フェルミオン・ボソン散乱の最低次の連結ダイアグラムは図 6.6 に示した. 図 6.1 で概略を示した法則にしたがうと, 対応する S 行列要素は以下で与えられる.

$$
\begin{aligned}
&S_{\mathbf{p}_1{}'\sigma_1'n_1'\,\mathbf{p}_2{}'\sigma_2'n_2',\,\mathbf{p}_1\sigma_1n_1\,\mathbf{p}_2\sigma_2n_2} = \\
&(2\pi)^{-6}\sum_{k'l'm'\,klm}(-i)^2 g_{l'm'k'}\,g_{mlk}\,u^*_{l'}(\mathbf{p}_1{}'\sigma_1'n_1')\,u_l(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1) \\
&\times\int d^4x\int d^4y\,\Big(-i\Delta_{m'm}(y-x)\Big)e^{-ip_1'\cdot y}e^{ip_1\cdot x} \\
&\times\Big[e^{-ip_2'\cdot y}u^*_{k'}(\mathbf{p}_2{}'\sigma_2'n_2')e^{ip_2\cdot x}u_k(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2) \\
&+\ e^{-ip_2'\cdot x}u^*_{k}(\mathbf{p}_2{}'\sigma_2'n_2')e^{ip_2\cdot y}u_{k'}(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2)\Big]\,. \qquad (6.1.27)
\end{aligned}
$$

(添字 1 と 2 はここではそれぞれフェルミオンとボソンに使っている.) フェルミオン・フェルミオン散乱にも図 6.4 で示す二つの 2 次のダイアグラムがある. これらは, 以下の S 行列要素を与える.

$$
\begin{aligned}
&S_{\mathbf{p}_1{}'\sigma_1'n_1'\,\mathbf{p}_2{}'\sigma_2'n_2',\,\mathbf{p}_1\,\sigma_1\,n_1\,\mathbf{p}_2\,\sigma_2\,n_2} = (2\pi)^{-6}\sum_{k'l'm'klm}(-i)^2 g_{m'mk'}\,g_{l'lk} \\
&\quad\times u^*_{m'}(\mathbf{p}_2{}'\,\sigma_2'\,n_2')\,u^*_{l'}(\mathbf{p}_1{}'\,\sigma_1'\,n_1')\,u_m(\mathbf{p}_2\,\sigma_2\,n_2)u_l(\mathbf{p}_1\,\sigma_1\,n_1) \\
&\quad\times\int d^4x\int d^4y\;e^{-ip_2'\cdot x}e^{-ip_1'\cdot y}e^{ip_2\cdot x}e^{ip_1\cdot y}(-i)\Delta_{k'k}(x-y) \\
&\quad-[1'\rightleftharpoons 2'] \qquad (6.1.28)
\end{aligned}
$$

最後の項は前の項から $1'$ と $2'$ (または, 同じことだが, 1 と 2) を入れ替えたものを差し引くことを意味する. ボソン・ボソン散乱には 2 次の項はない. 最低次のダイアグラムは図 6.7 に与えられているような

4次のダイアグラムだ. このダイアグラムの (6.1.27) と (6.1.28) に相当する表式は, プロパゲーターを計算し運動量空間への移行を行った後で, 6.3 節で与える.

前の例での相互作用 (6.1.18) では, 三つの場は全て異なっていた. したがって, 3次相互作用で, 全ての場が同じか, 少なくとも相互作用に対称に入る例を見ておくのが教育的だ.

理論 II

相互作用密度が, 実のボソン場 $\phi_\ell(x)$ の組について以下のように実数の完全対称結合定数 $g_{\ell mn}$ を持つ3次の相互作用の和になっている理論を考える.

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{3!}\sum_{\ell mn} g_{\ell mn}\phi_\ell(x)\phi_m(x)\phi_n(x)\,. \tag{6.1.29}$$

散乱過程 1 2 → 1′2′ をこの相互作用について2次で考えることにする. 二つの頂点のそれぞれに4本の外線のうち2本が付いていなければならない. (他に唯一考えられるのは, 外線のうち1本が一つの頂点に付き, 3本がもう一つの頂点につく場合だ. しかし, 3本の線が付いた頂点には他の頂点とつなぐ線が残っていないので, これは非連結なダイアグラムになってしまう.) それぞれの頂点で必要なもう1本の線は, 単に二つの頂点を互いにつなぐ役割をする. この種のダイアグラムは三つあり, 線1が付いている頂点に入る他の外線が 2, 1′, 2′ のどれかという点が異なる. (図 6.8 を見よ.) 上に述べた法則にしたがって, これらの三つのダイアグラムの S 行列への寄与は以下のようになる.

$$S_{\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1\,\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2\,,\,\mathbf{p}_1\sigma_1n_1\,\mathbf{p}_2\sigma_2n_2}$$
$$= (-i)^2(2\pi)^{-6}\sum_{\ell\ell'\ell''mm'm''} g_{\ell\ell'\ell''}\,g_{mm'm''}\int d^4x\int d^4y\Big(-i\Delta_{\ell''m''}(x,y)\Big)$$
$$\times\Big[u^*_\ell(\mathbf{p}'_1\sigma'_1n'_1)\,e^{-ip'_1\cdot x}\,u^*_{\ell'}(\mathbf{p}'_2\sigma'_2n'_2)\,e^{-ip'_2\cdot x}$$

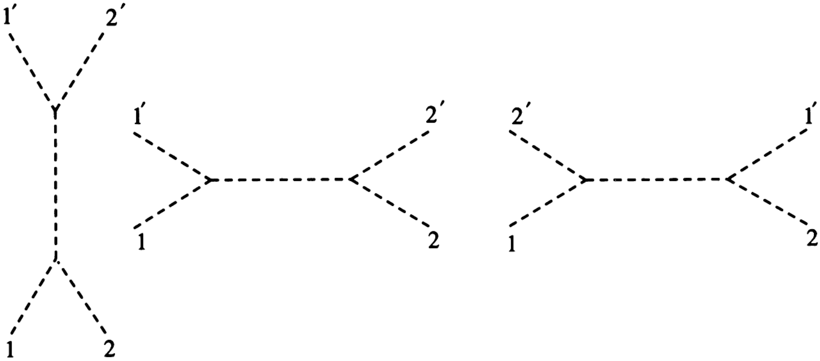


図 6.8: 相互作用 (6.1.29) の理論でのボソン・ボソン散乱の 2 次の連結ダイアグラム

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad \times u_m(\mathbf{p}_1\sigma_1 n_1)e^{ip_1\cdot y}\, u_{m'}(\mathbf{p}_2\sigma_2 n_2)\, e^{ip_2\cdot y} \\
&+ u^*_{\ell'}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1 n'_1)\, e^{-ip'_1\cdot x}\, u_\ell(\mathbf{p}_1\sigma_1 n_1)e^{ip_1\cdot x} \\
&\qquad\qquad \times u^*_{m'}(\mathbf{p}'_2\sigma'_2 n'_2)\, e^{-ip'_2\cdot y}\, u_m(\mathbf{p}_2\sigma_2 n_2)\, e^{ip_2\cdot y} \\
&+ u^*_{\ell'}(\mathbf{p}'_2\sigma'_2 n'_2)\, e^{-ip'_2\cdot x}\, u_\ell(\mathbf{p}_1\sigma_1 n_1)e^{ip_1\cdot x} \\
&\qquad\qquad \times u^*_{m'}(\mathbf{p}'_1\sigma'_1 n'_1)\, e^{-ip'_1\cdot y}\, u_m(\mathbf{p}_2\sigma_2 n_2)\, e^{ip_2\cdot y}\Big]. \qquad (6.1.30)
\end{aligned}
$$

たとえば, この理論のボソンが 1 種類のスピンのない粒子なら, 相互作用 (6.1.29) を

$$\mathcal{H} = g\phi^3/3! \qquad (6.1.31)$$

の形に書く. このとき, スカラー・スカラー散乱の S 行列要素 (6.1.30) は以下となる.

$$
\begin{aligned}
&S_{\mathbf{p}'_1\,\mathbf{p}'_2\,,\,\mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_2} = \\
&\frac{ig^2}{(2\pi)^6\sqrt{16E'_1E'_2E_1E_1}}\int d^4x\int d^4y\;\Delta_F(x-y)
\end{aligned}
$$

$$\times \Big[\exp(-i(p_1'+p_2')\cdot x)\,\exp(i(p_1+p_2)\cdot y) \\ +\exp(i(p_1-p_1')\cdot x)\,\exp(i(p_2-p_2')\cdot y) \\ +\exp(i(p_1-p_2')\cdot x)\,\exp(i(p_2-p_1')\cdot y)\Big].$$

ここで $\Delta_F(x-y)$ はスカラー場のプロパゲーターであり, 次節で計算する. $\mathcal{H}(x)$ について 3 次の項, より一般的には奇数次の項は存在しない.

6.2 プロパゲーターの計算

プロパゲーター (6.1.14) は場 $\psi_\ell(x)$ を共役場 $\psi_m^\dagger(y)$ と対にすることで得られ, ファインマン則で中心的な役割を果たす. この節ではそのプロパゲーターの計算を行う. (6.1.15) と (6.1.16) を (6.1.14) に代入し, 生成・消滅演算子の交換・反交換関係を使うと, 直ちに以下を得る.

$$-i\Delta_{\ell m}(x,y) = \theta(x-y)(2\pi)^{-3}\int d^3p\sum_\sigma u_\ell(\mathbf{p}\,\sigma\,n)u_m^*(\mathbf{p}\,\sigma\,n)e^{ip\cdot(x-y)} \\ \pm\,\theta(y-x)(2\pi)^{-3}\int d^3p\sum_\sigma v_m^*(\mathbf{p}\,\sigma\,n)v_\ell(\mathbf{p}\,\sigma\,n)e^{ip\cdot(y-x)}\,. \tag{6.2.1}$$

5 章で交換子と反交換子を計算する際に, 以下を示した.

$$\sum_\sigma u_\ell(\mathbf{p}\,\sigma\,n)u_m^*(\mathbf{p}\,\sigma\,n) = \left(2\sqrt{\mathbf{p}^2+m_n^2}\right)^{-1}P_{\ell m}\left(\mathbf{p},\sqrt{\mathbf{p}^2+m_n^2}\right)\,, \tag{6.2.2}$$

$$\sum_\sigma v_\ell(\mathbf{p}\,\sigma\,n)v_m^*(\mathbf{p}\,\sigma\,n) = \pm\left(2\sqrt{\mathbf{p}^2+m_n^2}\right)^{-1}P_{\ell m}\left(-\mathbf{p},-\sqrt{\mathbf{p}^2+m_n^2}\right)\,. \tag{6.2.3}$$

ここで $P_{\ell m}(\mathbf{p},\omega)$ は $\mathbf{p}$ と ω の多項式だ. ((6.2.1) と同じようにここでも, 上と下の符号はそれぞれボソンとフェルミオンの場に対応する.) たとえば, もし $\psi_\ell(x)$ と $\psi_m(y)$ がスピンゼロのスカラー場 $\phi(x)$ と

$\phi(y)$ であれば, 単に,

$$P(p) = 1 \tag{6.2.4}$$

となる. もし, $\psi_\ell(x)$ と $\psi_m(y)$ がスピン $\frac{1}{2}$のディラック場なら, ℓ と m は四つの値をとるディラック添字で,

$$P_{\ell m}(p) = \Big[(-i\gamma_\mu p^\mu + m)\beta\Big]_{\ell m} \tag{6.2.5}$$

だ. (行列 β は $\psi_\ell(x)$ と $\psi_m^\dagger(y)$ の対を考えているために起こる. $\psi(x)$ と$\bar{\psi}(y) \equiv \psi^\dagger(y)\beta$ の対ではこれはない.) もし $\psi_\ell(x)$ と $\psi_m(y)$ がスピン 1 の粒子のベクトル場 $V_\mu(x)$ と $V_\nu(y)$ なら,

$$P_{\mu\nu}(p) = \eta_{\mu\nu} + m^{-2}p_\mu p_\nu \tag{6.2.6}$$

となる. より一般的には, $\psi_\ell(x)$ と $\psi_m(y)$ のスピンが jであり, 斉次ローレンツ群の表現 (A, B) と $(\tilde{A}, \tilde{B})$ の粒子の場$\psi_{ab}(x)$ と $\psi_{\tilde{a}\tilde{b}}(y)$ であるとき,

$$\begin{aligned} P_{ab,\tilde{a}\tilde{b}}(p) = \sum_{a'b'}\sum_{\tilde{a}'\tilde{b}'}\sum_{\sigma} & C_{AB}(j\sigma, a'b')C_{\tilde{A}\tilde{B}}(j\sigma, \tilde{a}'\tilde{b}') \\ & \times\Big[\exp(-\theta\hat{p}\cdot\mathbf{J}^{(A)})\Big]_{aa'}\Big[\exp(+\theta\hat{p}\cdot\mathbf{J}^{(B)})\Big]_{bb'} \\ & \times\Big[\exp(-\theta\hat{p}\cdot\mathbf{J}^{(\tilde{A})})\Big]_{\tilde{a}\tilde{a}'}\Big[\exp(+\theta\hat{p}\cdot\mathbf{J}^{(\tilde{B})})\Big]_{\tilde{b}\tilde{b}'} \end{aligned} \tag{6.2.7}$$

となる. ここで, $\sinh\theta = |\mathbf{p}|/m$ であり, $a, b, \tilde{a}, \tilde{b}$ はそれぞれ $-A$ から $+A$, $-B$ から $+B$, $-\tilde{A}$ から $+\tilde{A}$, $-\tilde{B}$ から $+\tilde{B}$, に 1 ずつ変化する. また, 添字 $a', b', \tilde{a}', \tilde{b}'$についても同様だ.

(6.2.2) と (6.2.3) を (6.2.1) に代入すると以下を得る.

$$\begin{aligned} -i\Delta_{\ell m}(x, y) = {} & \theta(x-y)P_{\ell m}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta_+(x-y) \\ & + \theta(y-x)P_{\ell m}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta_+(y-x)\,. \end{aligned} \tag{6.2.8}$$

ここで, $\Delta_+(x)$ は 5 章で導入した以下の関数だ.

$$\Delta_+(x) \equiv (2\pi)^{-3} \int d^3p\, (2p^0)^{-1} e^{ip\cdot x} \,. \tag{6.2.9}$$

この式で p^0 は $+\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$にとる.

これより先に進むためには, 多項式 $P(p)$ の定義をどう拡張するかを多少述べる必要がある. (6.2.2) と (6.2.3) では $P(p)$ は「質量殻上」の 4 元運動量, つまり, $p^0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2}$についてのみ定義されている. そのような 4 元運動量のどのような多項式も p^0について 1 次にとれる. これは $(p^0)^{2\nu}$ か $(p^0)^{2\nu+1}$ のどんな次数もそれぞれ $(\mathbf{p}^2+m^2)^\nu$ か $p^0(\mathbf{p}^2+m^2)^\nu$と書けるからだ. したがって, 以下の条件を満たすような多項式 $P^{(L)}(q)$ を定義できる.

$$P^{(L)}(p) = P(p) \qquad \left(p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2+m^2} \text{ のとき}\right) ,$$

$$P^{(L)}(q) = P^{(0)}(\mathbf{q}) + q^0 P^{(1)}(\mathbf{q}) \quad (\text{一般の } q^\mu \text{のとき}) \,. \tag{6.2.10}$$

ここで, $P^{(0,1)}$ は $\mathbf{q}$ にのみ依る多項式だ. こうしておくと, 関係式,

$$\frac{\partial}{\partial x^0}\,\theta(x^0-y^0) = -\frac{\partial}{\partial x^0}\,\theta(y^0-x^0) = \delta(x^0-y^0) \tag{6.2.11}$$

($\theta(x)$ が x^0で 1 だけ変化する以外は定数であることを思い出そう) を使って, 微分演算子を (6.2.8) の θ 関数の左に動かして,

$$\Delta_{\ell m}(x,y) = P^{(L)}_{\ell m}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta_F(x-y)$$
$$+\ \delta(x^0-y^0)P^{(1)}_{\ell m}\left(-i\nabla\right)\Big[\Delta_+(x-y)-\Delta_+(y-x)\Big] \tag{6.2.12}$$

とできる. ここで, Δ_F は「ファインマン・プロパゲーター」

$$-\,i\Delta_F(x) \equiv \theta(x)\Delta_+(x) + \theta(-x)\Delta_+(-x) \tag{6.2.13}$$

だ. しかし, (6.2.9) で $\mathbf{x} \to -\mathbf{x}$ と変化させると, これは積分変数の $\mathbf{p} \to -\mathbf{p}$ の変化で打消されるから, $x^0 = 0$ では関数 $\Delta_+(x)$ は $\mathbf{x}$ について偶関数だ. したがって, (6.2.12) の第2項を落とし, 単に,

$$\Delta_{\ell m}(x,y) = P^{(L)}_{\ell m}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\Delta_F(x-y) \tag{6.2.14}$$

と書ける.

ファインマン・プロパゲーターはフーリエ積分として表すのが最も便利だ. (6.2.13) の階段関数は以下のようにフーリエ表現できる.*

$$\theta(t) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-ist)}{s+i\epsilon}\,ds\,. \tag{6.2.15}$$

これを$\Delta_+(x)$ のフーリエ積分 (6.2.9) と合わせて, (6.2.13) の第1項に新しい積分変数 $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p}$, $q^0 = p^0 + s$ を導入すると以下を得る.

$$-i\Delta_F(x) = -\frac{1}{2\pi i}\int d^3q\int_{-\infty}^{\infty}dq^0\,\frac{\exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} - iq^0x^0)}{(2\pi)^3 2\sqrt{\mathbf{q}^2+m^2}}$$
$$\times\left[\left(q^0 - \sqrt{\mathbf{q}^2+m^2}+i\epsilon\right)^{-1} + \left(-q^0 - \sqrt{\mathbf{q}^2+m^2}+i\epsilon\right)^{-1}\right].$$

通分して4次元記法を使うと, $q^2 \equiv \mathbf{q}^2 - (q^0)^2$として, 以下の単純な式を得る.

$$\Delta_F(x) = (2\pi)^{-4}\int d^4q\,\frac{\exp(iq\cdot x)}{q^2+m^2-i\epsilon}\,. \tag{6.2.16}$$

(分母では $2\epsilon\sqrt{\mathbf{q}^2+m^2}$ を ϵ で置き換えた. これは, この量の唯一重要な点は, これが正の微小量だということだからだ.) ところで, これは Δ_F が以下の意味でクライン・ゴルドン微分演算子に対するグリーン関数であることを示している.

$$(\Box - m^2)\Delta_F(x) = -\delta^4(x)\,. \tag{6.2.17}$$

*これを証明するには, $t > 0$ ならば積分経路は下半面の大きな時計回りの半円で閉じることができ, 積分は $s = -i\epsilon$の極から$-2\pi i$ を得るし, $t < 0$ なら積分は上半面の反時計回りの大きな半円で閉じることができ, 被積分関数が上半面で解析的なために積分はゼロとなることをみればよい.

その境界条件は分母の $-i\epsilon$ によって決められている. (6.2.13) で示されているように, $\Delta_F(x)$ は $x^0 \to +\infty$ と $x^0 \to -\infty$ の極限で, それぞれ, 正の振動数の項 $\exp(-ix^0\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2})$ か負の振動数の項 $\exp(+ix^0\sqrt{\mathbf{p}^2+m^2})$ しか持たない.

(6.2.16) を (6.2.14) に代入すると, プロパゲーターは,

$$\Delta_{\ell m}(x,y) = (2\pi)^{-4}\int d^4q\,\frac{P^{(L)}_{\ell m}(q)e^{iq\cdot(x-y)}}{q^2+m^2-i\epsilon} \tag{6.2.18}$$

と与えられる. この表現には自明な問題が一つある. 多項式 $P(p)$ は p が質量殻上にあって $p^2=-m^2$ のときは共変だが, (6.2.18) では, 質量殻に限らず全ての q^μ について積分する. 多項式 $P^{(L)}(q)$ は一般の q^μ に対して q^0 について 1 次と定義したが, この条件はこの多項式が空間成分 q^i についても 1 次でない限りローレンツ共変性を満たさない. その代りに, 多項式 $P(p)$ の一般の 4 元運動量 q^μ への拡張を単に $P(q)$ と書き, $P(q)$ が以下の意味で一般の q^μ に対してローレンツ共変であるように定義する.

$$P_{\ell m}(\Lambda q) = D_{\ell\ell'}(\Lambda)D^*_{mm'}(\Lambda)P_{\ell' m'}(q)\,.$$

ここで $\Lambda^\mu{}_\nu$ は一般のローレンツ変換であり, $D(\Lambda)$ はローレンツ群の適切な表現だ. 例えば, スカラー, ディラック, ベクトルの各場については, これらの共変的な拡張は, 明らかに (6.2.4), (6.2.5), (6.2.6) で単に p^μ を一般の 4 元運動量 q^μ で置き換えて得られる. スカラー場とディラック場については, これらはすでに q^0 について 1 次だから, $P^{(L)}(q)$ と $P(q)$ の間に差はない.

$$P^{(L)}_{\ell m}(q) = P_{\ell m}(q) \qquad (\text{スカラー場, ディラック場})\,. \tag{6.2.19}$$

一方, スピン 1 の粒子のベクトル場では共変多項式 $P_{\mu\nu}(q) \equiv \eta_{\mu\nu} + m^{-2}q_\mu q_\nu$ の 00 成分 は q^0 について 2 次だから, 以下のような差がある.

$$P^{(L)}_{\mu\nu}(q) = \eta_{\mu\nu} + m^{-2}\left[q_\mu q_\nu - \delta^0_\mu\delta^0_\nu(q_0^2-\mathbf{q}^2-m^2)\right]$$

$$= P_{\mu\nu}(q) + m^{-2}(q^2 + m^2)\delta^0_\mu \delta^0_\nu \,. \tag{6.2.20}$$

(ここで余分な項は, それが $P_{00}(q)$ の $(q_0)^2$ 項を打消すという条件と, q^μ が質量殻上にあるときにゼロとなる条件から決まる.) これを (6.2.18) に入れるとベクトル場のプロパゲーターが以下のように求まる.

$$\Delta_{\mu\nu}(q) = (2\pi)^{-4} \int d^4 q \, \frac{P_{\mu\nu}(q) e^{iq\cdot(x-y)}}{q^2 + m^2 - i\epsilon} + m^{-2}\delta^4(x-y)\delta^0_\mu \delta^0_\nu \,. \tag{6.2.21}$$

最初の項は明白に共変的だ. 第 2 項は共変的ではないが, 局所的だからハミルトニアン密度に局所的な非共変項を加えて打消すことができる. 具体的には, $V_\mu(x)$ が $\mathcal{H}(x)$ の $V_\mu(x)J^\mu(x)$ 項を通じて他の場と相互作用するとき, (6.2.21) の第 2 項の影響は有効相互作用

$$-i\mathcal{H}_{eff}(x) = \tfrac{1}{2}\Big[-iJ^\mu(x)\Big]\Big[-iJ^\nu(x)\Big]\Big[-im^{-2}\delta^0_\mu \delta^0_\nu\Big]$$

を作り出すことだ. (因子 $-i$ は頂点とプロパゲーターに通常ともなうものだ. 因子 $\frac{1}{2}$ は $\mathcal{H}_{eff}(x)$ と他の場を対にするのに J^μ と J^νとを入替えた 2 通りの方法があるからだ.) したがって, (6.2.21) の非共変的な第 2 項の影響は $\mathcal{H}(x)$ に以下の非共変項を付け加えることで打消すことができる.

$$\mathcal{H}_{NC}(x) = -\mathcal{H}_{eff}(x) = \frac{1}{2m^2}\Big[J^0(x)\Big]^2 \,. \tag{6.2.22}$$

このように, ベクトル場の同時刻交換関係が間隔ゼロで特異なために, スカラーのときより広い種類の相互作用を扱う必要性が生じる. この理論での S 行列のローレンツ不変性の非摂動論的証明は次章で詳細に与える.

これはスピンが $j \geq 1$ のときにのみ起こる現象と考えてはならない. たとえば, (5 章で論じる) スピンが $j = 0$ でスカラー場の微分 $\partial_\lambda \phi(x)$ に等しいベクトル場を考えよう. この場をスカラー $\phi^\dagger(y)$ と対にする

とき, 質量殻上の多項式 $P(p)$ は以下で与えられる.

$$P_\lambda(p) = ip_\lambda \,. \tag{6.2.23}$$

しかし, $\partial_\lambda \phi(x)$ を $\partial_\eta \phi^\dagger(y)$ と対にすると以下の多項式を得る.

$$P_{\lambda,\eta}(p) = p_\lambda p_\eta \,. \tag{6.2.24}$$

一般の質量殻上にない運動量 q^μ に対しての共変多項式は, ここでも, 単に q^μ を (6.2.23) と (6.2.24) の p^μ に代入して得られる. (6.2.23) で $P_\lambda(q)$ は既に q_0 について 1 次だから, $P_\lambda(q)$ と $P^{(L)}_\lambda(q)$ に差はない. しかし, (6.2.24) については, 以下の差がある.

$$\begin{aligned} P^{(L)}_{\lambda,\eta}(q) &= q_\lambda q_\eta - (q_0^2 - \mathbf{q}^2 - m^2)\delta^0_\lambda \delta^0_\eta \\ &= P_{\lambda,\eta}(q) + (q^2 + m^2)\delta^0_\lambda \delta^0_\eta \,. \end{aligned} \tag{6.2.25}$$

したがって, 対応するプロパゲーターは,

$$\Delta_{\lambda,\eta}(x,y) = (2\pi)^{-4} \int d^4q \, \frac{q_\lambda q_\eta e^{iq\cdot x}}{q^2 + m^2 - i\epsilon} \; + \; \delta^0_\lambda \delta^0_\eta \delta^4(x-y) \tag{6.2.26}$$

となる. 前と同じように, 第 2 項の非共変的な影響は相互作用に以下の非共変項を加えて打消すことができる.

$$\mathcal{H}_{NC}(x) = \tfrac{1}{2}\Big[J^0(x)\Big]^2 . \tag{6.2.27}$$

ここで, $J^\mu(x)$ は $\mathcal{H}(x)$ の共変部分で $\partial_\mu \phi(x)$ にかかるカレントだ.

プロパゲーターの非共変項の影響は (少なくとも質量のある粒子について) このようにして必ずハミルトニアン密度に非共変的な局所項を付け加えて打消すことができることは明らかだろう. これはプロパゲーターの分子 $P^{(L)}_{\ell m}(q)$ は, q^μ が質量殻上にあるとき共変多項式 $P_{\ell m}(q)$ に等しいから, $P^{(L)}_{\ell m}(q)$ と $P_{\ell m}(q)$ の差は因子 $q^2 + m^2$ を含むからだ. この差の (6.2.18) への寄与をみると, この因子は分母

の $(q^2+m^2-i\epsilon)$ を打消すから, (6.2.18) は常に共変項とデルタ関数 $\delta^4(x-y)$ かその微分に比例する項からなる. 後者の影響は相互作用に, 対になる場が結合するカレントかその微分の 2 次項を加えて打消すことができる. 以下では, 暗黙のうちにこのような項が相互作用に含まれていて, そのためにプロパゲーター (6.2.18) には共変的な多項式 $P_{\ell m}(q)$ が現れるとして, 添字 'L' を省略する.

これは比較的特別なやりかただと思うかもしれない. しかし幸いなことに, 後の章で論じる正準形式では, プロパゲーターの非共変項を打消すのに必要なハミルトニアン密度の非共変項は自動的に生じる. 実際, これは正準形式を導入する動機の一つでもある.

* * *

この節を終える前に, (6.2.1) に同等で, 文献によく登場するプロパゲーターの他の定義を述べておこう. まず, (6.1.14) の真空期待値をとると,

$$
\begin{aligned}
-i\Delta_{\ell m}(x,y) = \theta(x-y)\left\langle\left[\psi_\ell^+(x),\psi_m^{+\dagger}(y)\right]_\mp\right\rangle_0 \\
\pm\,\theta(y-x)\left\langle\left[\psi_m^{-\dagger}(y),\psi_\ell^-(x)\right]_\mp\right\rangle_0
\end{aligned}
\qquad (6.2.28)
$$

を得る. (ここで, $\langle AB\cdots\rangle_0$ は真空期待値 $(\Phi_0, AB\cdots\Phi_0\,)$ を意味する.) $\psi_\ell^+(x)$ と $\psi_m^{-\dagger}(y)$ の両方とも真空を消すので, 以下のように (6.2.28) の交換・反交換関係のうち一つの項しかプロパゲーターに寄与しない.

$$
-i\Delta_{\ell m}(x,y) = \theta(x-y)\langle\psi_\ell^+(x)\psi_m^{+\dagger}(y)\rangle_0 \pm \theta(y-x)\langle\psi_m^{-\dagger}(y)\psi_\ell^-(x)\rangle_0\,. \qquad (6.2.29)
$$

また, $\psi^{-\dagger}$ と ψ^+ は右の真空状態を消し, ψ^- と $\psi^{+\dagger}$ は左の真空状態を消すので, ψ^+ と ψ^- は (6.2.29) のどこでも完全な場 $\psi=\psi^++\psi^-$ で置き換えられて, 以下を得る.

$$
-i\Delta_{\ell m}(x,y) = \theta(x-y)\langle\psi_\ell(x)\psi_m^\dagger(y)\rangle_0 \pm \theta(y-x)\langle\psi_m^\dagger(y)\psi_\ell(x)\rangle_0\,. \qquad (6.2.30)
$$

これはしばしば, フェルミオン演算子の奇数回の置換では負の符号を持つように定義を拡張した時間順序積 T を使って,** 以下のように書かれる.

$$-i\Delta_{\ell m}(x,y) = \langle T\{\psi_\ell(x)\psi_m^\dagger(y)\}\rangle_0 \ . \qquad (6.2.31)$$

6.3 運動量空間でのファインマン則

6.1 節で概略を述べたファインマン則では, 与えられた N 次のダイアグラムの S 行列への寄与を, 時空に依存する因子の積の N 個の時空座標にわたる積分として表す. 時空座標 x^μの頂点を出る運動量 p'^μ の終状態の粒子 (または反粒子) の線から $\exp(-ip'\cdot x)$ に比例する因子を得る. そして, 時空座標 x^μの頂点に入る運動量 p^μ の始状態の粒子の線からは $\exp(+ip\cdot x)$ に比例する因子を得る. 6.2 節では y から x への線にともなう因子は, $\exp(iq\cdot(x-y))$ に比例する被積分関数の質量殻上にない 4 元運動量 q^μのフーリエ積分で表されることをみた. q^μ は内線に沿って y から x への矢印の方向に流れる 4 元運動量とみなすことができる. したがって各頂点の時空の位置に関する積分は, 単に以下の因子を与える.

$$(2\pi)^4\,\delta^4\left(\sum p + \sum q - \sum p' - \sum q'\right) \ . \qquad (6.3.1)$$

ここで, $\sum p'$ と $\sum p$ はそれぞれ, その頂点を出て行く終状態の全ての粒子と, 頂点に入る始状態の全ての粒子の運動量の和を意味する. また, $\sum q'$ と $\sum q$ はそれぞれ, 矢印が頂点から出て行く向きと, 頂点に入る向きの内線全ての和だ. もちろん, x^μ に関する積分の代りに内線一本につき一つのフーリエ変数 q^μ についての積分がある.

これらの考察は, S 行列への寄与を運動量変数についての積分で表す新たなファインマン則にまとめることができる (図 6.9 を見よ).

**これは, 3 章のハミルトニアン密度の時間順序積の定義と矛盾しない. なぜなら, ハミルトニアン密度はフェルミ場の因子を偶数個だけ含むからだ.

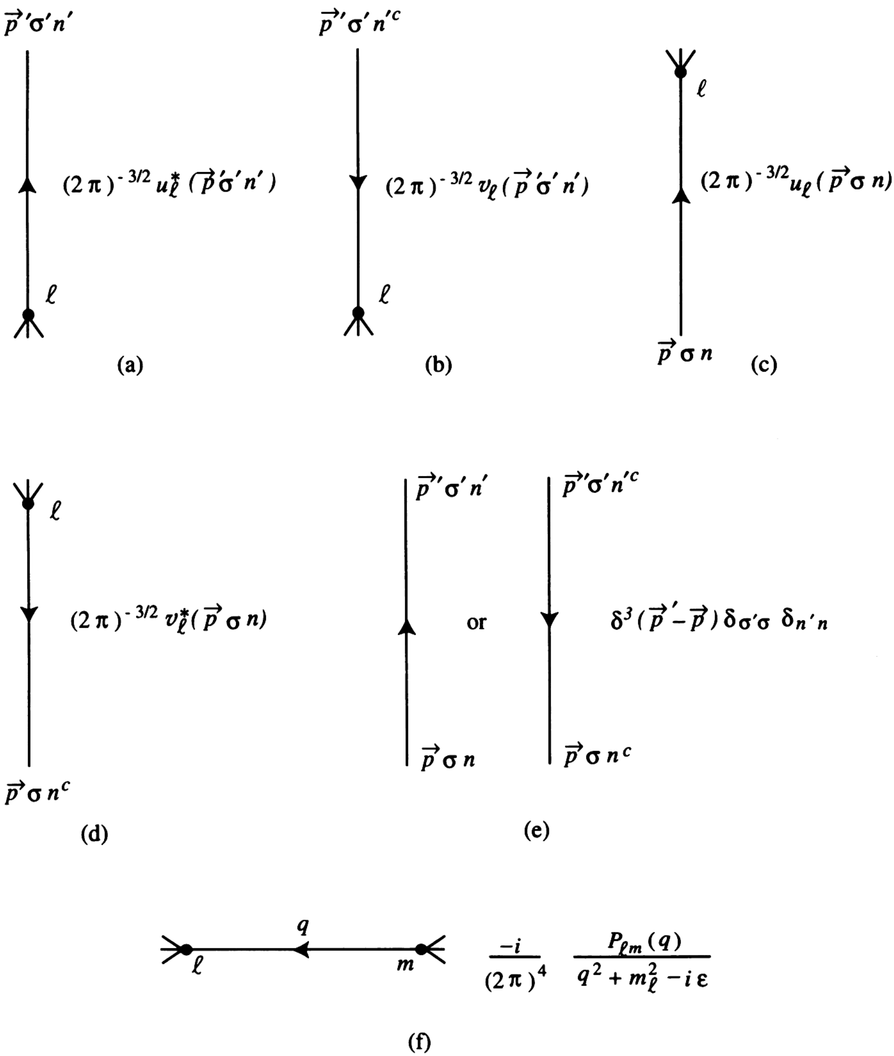


図 6.9: S 行列の運動量空間での計算に現れる演算子の対のダイアグラム的表現. 右の表現はファインマン則の各線について S 行列の運動量積分に含まれるべき因子.

(i) 望む次数のファインマン・ダイアグラムを 6.1 節で述べたようにすべて書く. しかし, 各頂点に時空の座標を与える代りに, 各内線に矢印の方向 (矢印のない中性粒子についてはどちらかの方向) に流れる質量殻外の運動量を与える.

(ii) i 種の各頂点は以下の因子を与える.

$$-i(2\pi)^4 g_i\, \delta^4\left(\sum p+\sum q-\sum p'-\sum q'\right) . \qquad (6.3.2)$$

ここで, 運動量の和は (6.3.1) と同じ意味だ. このデルタ関数はダイアグラムの全ての点で 4 元運動量が保存されていることを保証する. ダイアグラムを上へ出て行く各線は, 矢印が上向きか下向きかに応じて, それぞれ, 因子, $(2\pi)^{-3/2}u_\ell^*(\mathbf{p}'\sigma'n')$ か $(2\pi)^{-3/2}v_\ell(\mathbf{p}'\sigma'n')$ を与える. ダイアグラムの下から入ってくる各線は, 矢印が上向きか下向きかに応じて, それぞれ, 因子 $(2\pi)^{-3/2}u_\ell(\mathbf{p}\sigma n)$ か $(2\pi)^{-3/2}v_\ell^*(\mathbf{p}\sigma n)$ を与える. 端が ℓ と m の添字を持ち矢印が m から ℓ へ向いていて, 運動量 q^μを持つ各内線は, 因子として$-i\Delta_{\ell m}(q)$ の積分の被積分関数,

$$-i(2\pi)^{-4}P_{\ell m}(q)\Big/(q^2+m_\ell^2-i\epsilon) \qquad (6.3.3)$$

を与える. ここで以下のことを思い出しておく. 4 元運動量 q のスカラー・反スカラーについては, u と v は単に $(2q^0)^{-1/2}$ であり, 多項式 $P(q)$ は 1 だ. 4 元運動量 p で質量 M のディラックスピノルについては, u と v は 5.5 節で述べた規格化されたディラックスピノルであり, 多項式 $P(p)$ は行列 $(-i\gamma_\mu p^\mu+M)\beta$ だ.

(iii) これらの因子全ての積を内線が運ぶ運動量について積分し, 全ての場の添字 ℓ, m 等について和をとる.

(iv) 各ファインマン・ダイアグラムについてこのように得られた結果を足し上げる.

場合によっては, 6.1 節の (v) と (vi) で述べたように更に組み合わせの因子とフェルミオンの符号をいれる必要もある. その例はこの節の最後に与える.

各内線に対応して 4 元運動量積分があるが, これらの多くは, 頂点にともなうデルタ関数で消される. エネルギーと運動量は, ファインマン・ダイアグラムの各連結部分で別々に保存されるから, ダイアグラムが C 個の連結部分からなれば, C 個のデルタ関数が残る. したがって, I 個の内線と V 個の頂点からなるダイアグラムでは, デルタ関数で決まらない独立な 4 元運動量は $I-[V-C]$ 個ある. これはまた, 以下のように明らかに, 独立なループの数 L に等しい.

$$L = I - V + C\,. \tag{6.3.4}$$

このループの数はダイアグラムを非連結にすることなく切断できる線の最大の本数と定義した. これは, このような内線は, そしてまた, このような内線のみが独立な 4 元運動量を持てるからだ. 独立な運動量変数は各ループを回る運動量を特徴づけていると考えられる. 特に, ループのないものを樹木ダイアグラムと呼ぶ. これらのダイアグラムでは, デルタ関数を考慮に入れると運動量空間の積分は残らない.

例えば, 相互作用 (6.1.18) を持つ理論で, フェルミオン・ボソン散乱の S 行列 (6.1.27) は運動量空間のファインマン則で以下のように与えられる.

$$\begin{aligned}
&S_{\mathbf{p}_1{}'\sigma_1'n_1'\,\mathbf{p}_2{}'\sigma_2'n_2'\,,\,\mathbf{p}_1\sigma_1n_1\,\mathbf{p}_2\sigma_2n_2} = \\
&\quad\sum_{k'l'm'klm}(-i)^2(2\pi)^8 g_{l'm'k'}\,g_{mlk}\,u^*_{l'}(\mathbf{p}_1{}'\sigma_1'n_1')\,u_l(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1) \\
&\times\int d^4q\,\left(-i(2\pi)^{-4}\frac{P_{m'm}(q)}{q^2+m_m^2-i\epsilon}\right) \\
&\times(2\pi)^{-6}\Big[u^*_{k'}(\mathbf{p}_2{}'\sigma_2'n_2')u_k(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2)\delta^4(p_2-p_{2'}-q)\delta^4(p_1+q-p_{1'}) \\
&\quad+\;u^*_k(\mathbf{p}_2{}'\sigma_2'n_2')u_{k'}(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2)\delta^4(p_2-p_{1'}-q)\delta^4(p_1-p_{2'}+q)\Big]\,.
\end{aligned}$$

ここで添字 1 と 2 はそれぞれフェルミオンとボソンを意味する. この運動量積分は自明で, 以下を得る.

$$
\begin{aligned}
&S_{\mathbf{p}_1{}'\sigma_1'n_1'\,\mathbf{p}_2{}'\sigma_2'n_2',\,\mathbf{p}_1\sigma_1n_1\,\mathbf{p}_2\sigma_2n_2} = i(2\pi)^{-2}\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2') \\
&\quad\times\sum_{k'l'm'klm} g_{l'm'k'}\,g_{mlk}\,u^*_{l'}(\mathbf{p}_1{}'\sigma_1'n_1')\,u_l(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1) \\
&\quad\times\left[\frac{P_{m'm}(p_{1'}-p_1)}{(p_{1'}-p_1)^2+m_m^2-i\epsilon}\,u^*_{k'}(\mathbf{p}_2{}'\sigma_2'n_2')u_k(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2)\right. \\
&\quad\left.+\ \frac{P_{m'm}(p_{2'}-p_1)}{(p_{2'}-p_1)^2+m_m^2-i\epsilon}\,u^*_{k}(\mathbf{p}_2{}'\sigma_2'n_2')u_{k'}(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2)\right]\,. \qquad (6.3.5)
\end{aligned}
$$

同様にして, この理論でのフェルミオン・フェルミオン散乱の S 行列要素 (6.1.28) は以下で与えられる.

$$
\begin{aligned}
&S_{\mathbf{p}_1{}'\sigma_1'n_1'\,\mathbf{p}_2{}'\sigma_2'n_2',\,\mathbf{p}_1\,\sigma_1\,n_1\,\mathbf{p}_2\,\sigma_2\,n_2} = i(2\pi)^{-2}\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2') \\
&\quad\times\sum_{k'l'm'klm} g_{m'mk'}\,g_{l'lk}\frac{P_{k'k}(p_{1'}-p_1)}{(p_{1'}-p_1)^2+m_k^2-i\epsilon} \\
&\quad\times u^*_{m'}(\mathbf{p}_2{}'\,\sigma_2'\,n_2')\,u^*_{l'}(\mathbf{p}_1{}'\,\sigma_1'\,n_1')\,u^*_m(\mathbf{p}_2\,\sigma_2\,n_2)u^*_l(\mathbf{p}_1\,\sigma_1\,n_1) \\
&\quad-[1'\rightleftharpoons 2']\,. \qquad (6.3.6)
\end{aligned}
$$

これらの例をみると, より簡略化した記法が必要なことがわかる. フェルミオン・ボソンの結合行列を以下のように定義する.

$$
[\Gamma_k]_{lm}\equiv g_{lmk}\,. \qquad (6.3.7)
$$

こうすると, フェルミオン・ボソン散乱の行列要素 (6.3.5) は行列の記法で以下のように書換えることができる.

$$
\begin{aligned}
&S_{\mathbf{p}_1{}'\sigma_1'n_1'\,\mathbf{p}_2{}'\sigma_2'n_2',\,\mathbf{p}_1\sigma_1n_1\,\mathbf{p}_2\sigma_2n_2} = i(2\pi)^{-2}\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2')\sum_{k'k} \\
&\times\left[\ \left(u^\dagger(\mathbf{p}_1{}'\sigma_1'n_1')\,\Gamma_{k'}\frac{P(p_{1'}-p_1)}{(p_{1'}-p_1)^2+M^2-i\epsilon}\Gamma_k u(\mathbf{p}_1\sigma_1n_1)\right)\right. \\
&\qquad\times u^*_{k'}(\mathbf{p}_2{}'\sigma_2'n_2')u_k(\mathbf{p}_2\sigma_2n_2)
\end{aligned}
$$

$$+ \quad \left(u^\dagger(\mathbf{p}_1{}'\sigma_1'n_1')\,\Gamma_{k'}\frac{P(p_{2'}-p_1)}{(p_{2'}-p_1)^2+M^2-i\epsilon}\Gamma_k u(\mathbf{p}_1\sigma_1 n_1)\right)$$
$$\left. \times\, u_k^*(\mathbf{p}_2{}'\sigma_2'n_2')u_{k'}(\mathbf{p}_2\sigma_2 n_2)\right] . \tag{6.3.8}$$

また, フェルミオン・フェルミオン散乱の行列要素 (6.3.6) については以下となる.

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}_1{}'\sigma_1'n_1'\,\mathbf{p}_2{}'\sigma_2'n_2',\,\mathbf{p}_1\sigma_1n_1\,\mathbf{p}_2\sigma_2n_2} &= i(2\pi)^{-2}\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2') \\ &\times \sum_{k'k}\frac{P_{k'k}(p_{1'}-p_1)}{(p_{1'}-p_1)^2+m_k^2-i\epsilon} \\ &\times \left(u^\dagger(\mathbf{p}_2{}'\,\sigma_2'\,n_2')\,\Gamma_{k'}u(\mathbf{p}_1{}'\,\sigma_1'\,n_1')\right)\left(u^\dagger(\mathbf{p}_2\,\sigma_2\,n_2)\Gamma_k\,u(\mathbf{p}_1\,\sigma_1\,n_1)\right) \\ &- [1'\rightleftharpoons 2'] \,. \end{aligned} \tag{6.3.9}$$

ここで, M^2 と m^2 それぞれ (6.3.8) と (6.3.9) のフェルミオンとボソンの対角質量行列だ. 一般的な法則として, 行列記法では係数関数, 結合定数, プロパゲーターを線に沿って, 矢印の逆向きに並べる. この記法で, 同じ理論のボソン・ボソン散乱の S 行列は図 6.7 の 1 ループ・ダイアグラムの和で以下のように与えられる.

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{p}_1{}'\sigma_1'n_1'\,\mathbf{p}_2{}'\sigma_2'n_2',\,\mathbf{p}_1\sigma_1n_1\,\mathbf{p}_2\sigma_2n_2} &= -\,\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2') \\ \times \sum_{k_1k_2k_1'k_2'} & u_{k_1'}^*(\mathbf{p}_1',\sigma_1',n_1')u_{k_2'}^*(\mathbf{p}_2',\sigma_2',n_2')u_{k_1}(\mathbf{p}_1,\sigma_1,n_1)u_{k_2}(\mathbf{p}_2,\sigma_2,n_2) \\ \times \int d^4q\ \mathrm{Tr}\Big\{ & \Gamma_{k_2'}\frac{P(q)}{q^2+M^2-i\epsilon}\Gamma_{k_1'}\frac{P(q+p_1')}{(q+p_1')^2+M^2-i\epsilon} \\ & \times \Gamma_{k_1}\frac{P(q+p_1'-p_1)}{(q+p_1'-p_1)^2+M^2-i\epsilon}\Gamma_{k_2}\frac{P(q-p_2')}{(q-p_2')^2+M^2-i\epsilon}\Big\} \\ + \cdots . \end{aligned} \tag{6.3.10}$$

ここで, 最後の行の $\cdots$ はボソン $1'$, $2'$, 2 を並び替えて得られる項を意味する. 右辺の最初の負の符号は, フェルミオン・ループにともなう余分の符号だ. ここではデルタ関数を消した後, 運動量積分が一つ

だけ残る. これは, ループが一つだけあるダイアグラムの法則にちょうど合っている. このような運動量積分をどう実行するかについては11章で論じる.

これをより明確にするために, 質量 M のディラックスピノル場 $\psi(x)$ と質量 m の擬スカラー場 $\phi(x)$ が相互作用 $-ig\phi\bar{\psi}\gamma_5\psi$ をする理論を考える. (因子 $-i$ は結合定数 g が実のときに相互作用がエルミートになるようにいれた.) $P(q)$ は, スカラー場については単に1で, スピノルについては $[-i\gamma_\mu q^\mu + M]\beta$ であることを思い出そう. また u は, エネルギーが E のスカラーについては $(2E)^{-1/2}$であり, スピノルについては5.5節で議論した普通に規格化されたディラックスピノルだ. (6.3.8), (6.3.9), (6.3.10) から, フェルミオン・ボソン, フェルミオン・フェルミオン, ボソン・ボソン散乱の最低次の連結 S 行列要素は以下で与えられることがわかる.

$$
\begin{aligned}
S_{\mathbf{p}_1'\sigma_1'\,\mathbf{p}_2'\,,\,\mathbf{p}_1\sigma_1\,\mathbf{p}_2} &= -i(2\pi)^{-2}g^2(4E_2'E_2)^{-1/2}\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2') \\
&\times\Bigg[\left(\bar{u}(\mathbf{p}_1{}'\sigma_1')\,\gamma_5\frac{-i\gamma_\mu(p_{1'}-p_1)^\mu+M}{(p_{1'}-p_1)^2+m^2-i\epsilon}\gamma_5 u(\mathbf{p}_1\sigma_1)\right) \\
&+\left(\bar{u}(\mathbf{p}_1{}'\sigma_1')\,\gamma_5\frac{-i\gamma_\mu(p_{2'}-p_1)^\mu}{(p_{2'}-p_1)^2+m^2-i\epsilon}\gamma_5\, u(\mathbf{p}_1\,\sigma_1)\right)\Bigg]\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{\mathbf{p}_1{}'\sigma_1'\,\mathbf{p}_2{}'\sigma_2'\,,\,\mathbf{p}_1\,\sigma_1\,\mathbf{p}_2\,\sigma_2} &= i(2\pi)^{-2}g^2\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2') \\
&\times\left(\bar{u}(\mathbf{p}_2'\,\sigma_2')\,\gamma_5\,u(\mathbf{p}_1'\,\sigma_1')\right)\left(\bar{u}(\mathbf{p}_2\,\sigma_2)\gamma_5\,u(\mathbf{p}_1\,\sigma_1)\right) \\
&\times\frac{1}{(p_{1'}-p_1)^2+m^2-i\epsilon} \\
&-[1'\rightleftharpoons 2']\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_{\mathbf{p}_1'\,\mathbf{p}_2'\,,\,\mathbf{p}_1\,\mathbf{p}_2} &= -(2\pi)^{-6}\,g^2\,(16E_1E_2E_1'E_2')^{-1/2}\,\delta^4(p_1+p_2-p_1'-p_2') \\
&\times\int d^4q\ \mathrm{Tr}\Bigg\{\gamma_5\frac{-i\gamma_\mu q^\mu+M}{q^2+M^2-i\epsilon}\gamma_5\frac{-i\gamma_\mu(q+p_1')^\mu+M}{(q+p_1')^2+M^2-i\epsilon} \\
&\times\ \gamma_5\frac{-i\gamma_\mu(q+p_1'-p_1)^\mu+M}{(q+p_1'-p_1)^2+M^2-i\epsilon}\gamma_5\frac{-i\gamma_\mu(q-p_2')^\mu+M}{(q-p_2')^2+M^2-i\epsilon}\Bigg\}+\cdots
\end{aligned}
$$

最後の表式で, $\cdots$ は粒子 2, 1′, 2′ の置換についての和を意味する. また, フェルミオンプロパゲーターの分子の因子 β を使って, $u^\dagger$ を $\bar{u}$ で置き換えてある.

* * *

別の有用なトポロジー的な結果として, ある種の線の保存則がある. いま, 全ての内線と外線は頂点で作られ, 内線の真中で対で消されるか, 外線としてダイアグラムを出て行くものと考える. (これは線の矢印の方向とは無関係とする.) 作られる線と消される線の数が等しいから, 内線の本数 I, 外線の本数 E, n_i 本の線を持つ頂点の数 V_i の間には以下の関係が成り立つ.

$$2I + E = \sum_i n_i V_i \,, \tag{6.3.11}$$

(これは各種の場ごとにも成立する.) とくに, 全ての相互作用が $n_i = n$ の同じ個数の場の積であれば, V を全ての頂点の数として,

$$2I + E = nV \,, \tag{6.3.12}$$

となる. この場合には, I を (6.3.4) と (6.3.11) から消去でき, 連結した (つまり $C = 1$ の) グラフの頂点の数は,

$$V = \frac{2L + E - 2}{n - 2} \,. \tag{6.3.13}$$

で与えられることがわかる. 例えば, 3 次相互作用では, 散乱過程のダイアグラム ($E = 4$) で $L = 0, 1, 2 \cdots$ のものは, それぞれ $V = 2, 4, 6 \cdots$ 個の頂点を持つ. 一般に, 結合定数の巾での展開はループの数についての展開になっている.

6.4 質量殻外のファインマン・ダイアグラム

どのような S 行列要素についてのファインマン・ダイアグラムでも, 全ての外線は「質量殻上」にある. つまり, 質量 m の粒子の外線

の4元運動量は $p_\mu p^\mu = -m^2$ を満たすよう拘束されている．しかし，外線のエネルギーが内線の場合と同様に3元運動量と関係のない自由変数である，「質量殻外」のファインマン・ダイアグラムを考察するのも重要だ．第一に，それらはより大きなファインマン・ダイアグラムの一部として起こる．例えば，あるダイアグラムの内線に挿入されている1ループは2本の外線がともに質量殻外にあるファインマン・ダイアグラムとみなせる．

もちろん，与えられたファインマン・ダイアグラムを質量殻外で計算すれば，質量殻上に移行することによって，それにともなう S 行列要素も簡単に求められる．これは，ダイアグラムに入る線に沿う p^μ は，始状態の粒子について $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$，終状態の粒子について $p^0 = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ とし，始状態の粒子と反粒子にそれぞれ $(2\pi)^{-3/2} u_\ell$ と $(2\pi)^{-3/2} v_\ell^*$，終状態の粒子と反粒子についてそれぞれ $(2\pi)^{-3/2} u_\ell^*$ と $(2\pi)^{-3/2} v_\ell$ を与えればよい．実際，8章の経路積分形式では，まず全ての外線が質量殻外にあるダイアグラムのファインマン則を求め，それから外線の運動量を質量殻上に持っていって S 行列要素を得るのがもっとも簡単なことがわかる．

質量殻外のファインマン・ダイアグラムは，ファインマン則に種々の外線の影響を取り入れた，より一般的な場合の一つにしか過ぎない．たとえば，ハミルトニアンに外場 $\epsilon_a(x)$ を含む項の和を加えたとしよう．すると，S 行列のダイソン級数 (3.5.10) に使われる相互作用 $V(t)$ は以下のようになる．

$$V_\epsilon(t) = V(t) + \sum_a \int d^3x \; \epsilon_a(\mathbf{x}, t)\, o_a(\mathbf{x}, t) \,. \tag{6.4.1}$$

「カレント」$o_a(t)$ は相互作用表示では，

$$o_a(t) = \exp(iH_0 t) o_a(0) \exp(-iH_0 t) \tag{6.4.2}$$

となり，通常の時間依存性を持つが，それ以外は全く任意の演算子だ．

ある与えられた遷移 $\alpha \to \beta$ は c 数の関数 $\epsilon_a(t)$ の汎関数 $S_{\beta\alpha}[\epsilon]$ となる. この汎関数は, 通常のファインマン則を自明な形に拡張したもので得られる. このファインマン則では $V(t)$ の通常の頂点に新たな頂点が加わる. この新たな頂点では, $o_a(x)$ が n_a 個の場の演算子の積なら, 位置の添字 x を持つ頂点 o_a には n_a 個の対応する線が付いていて, 位置座標空間のファインマン則で $-i\epsilon_a(x)$ と $o_a(x)$ に現れる数因子の積を与える. これより, $S_{\beta\alpha}[\epsilon]$ の $\epsilon=0$ での $\epsilon_a(x)$, $\epsilon_b(y)\cdots$ についての r 次の汎関数微分は, 座標空間のダイアグラムで r 個の頂点が加わり, それぞれに $n_a, n_b\cdots$ 本の内線が付き, 外線はないダイアグラムで与えられることがわかる. これらの頂点は位置の添字 $x, y\cdots$ を持っていて, それらについては, 積分はしない. そのような各頂点からは $-i$ と対応するカレント o_aに現れる数因子の積の寄与がある.

特に, これらのカレントが全て単一の場の因子であるとき, つまり,

$$V_\epsilon(t) = V(t) + \sum_\ell \int d^3x\ \epsilon_\ell(\mathbf{x}, t)\, \psi_\ell(\mathbf{x}, t)$$

であるとき, $S_{\beta\alpha}[\epsilon]$ の $\epsilon=0$ での $\epsilon_\ell(x)$, $\epsilon_m(y)\cdots$ についての r 次の汎関数微分は, 座標空間のダイアグラムで時空の添字が $x, y\cdots$ の r 個の頂点が加わり, それぞれに $\ell, m\cdots$種の内線が一本ずつ付き, 外線のないダイアグラムで与えられる. これらの線は質量殻外の外線と考えることができる. 通常の外線との違いは, これらの線の行列要素への寄与は, $(2\pi)^{-3/2}u_\ell(\mathbf{p},\sigma)e^{ip\cdot x}$ や $(2\pi)^{-3/2}u_\ell^*(\mathbf{p},\sigma)e^{-ip\cdot x}$ のような係数関数ではなく, プロパゲーターと, 線の端にある頂点からくる因子 $-i$ になっている点だ. 状態 α と β の粒子が質量殻上にあり, それに加えて運動量 $p, p'\cdots$ を持つ $\ell, m\cdots$種の外線が r 本ある運動量空間のファインマン・ダイアグラムの寄与は, 汎関数微分,

$$\left[\frac{\delta^r S_{\beta\alpha}[\epsilon]}{\delta\epsilon_\ell(x)\,\delta\epsilon_m(y)\cdots}\right]_{\epsilon=0}$$

から質量殻外の各線のプロパゲーターを取り除き, 適切なフーリエ変

換をし，適切な係数関数 u_ℓ, u_ℓ^* 等と因子 $(-i)^r$ をかけて得られる．

幾つかの目的のために，任意の質量殻外の振幅の全ての摂動論のダイアグラムの寄与の和と，ハイゼンベルグ表示での対応する演算子の時間順序積を全ハミルトニアンの固有状態ではさんだ行列要素の間に単純な関係があることを認識しておく．この関係は，摂動論の全次数で以下が成立するという定理[3]で与えられる．*

$$\left[\frac{\delta^r S_{\beta\alpha}[\epsilon]}{\delta\epsilon_a(x)\,\delta\epsilon_b(y)\cdots}\right]_{\epsilon=0} = \left(\Psi_\beta{}^-, T\Big\{-iO_a(x),\ -iO_b(y)\cdots\Big\}\Psi_\alpha{}^+\right)\ . \tag{6.4.3}$$

ここで $O_a(x)$ 等は $o_a(x)$ のハイゼンベルグ表示での対応するカレントだ．

$$O_a(\mathbf{x},t) = \exp(iHt)\,o_a(\mathbf{x},0)\exp(-iHt) = \Omega(t)\,o_a(\mathbf{x},t)\,\Omega^{-1}(t)\ , \tag{6.4.4}$$

$$\Omega(t) \equiv e^{iHt}\,e^{-iH_0t}\ . \tag{6.4.5}$$

そして，$\Psi_\beta{}^+$ と $\Psi_\beta{}^-$ はそれぞれ全ハミルトニアン Hの「in」状態と「out」状態だ．

証明は以下のようにする．(3.5.10) から，(6.4.3) の左辺は以下で与えられることがすぐにわかる．

$$\left[\frac{\delta^r S[\epsilon]}{\delta\epsilon_{a_1}(x_1)\ldots\delta\epsilon_{a_r}(x_r)}\right]_{\epsilon=0} = \sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-i)^{N+r}}{N!}\int_{-\infty}^{\infty}d\tau_1\cdots d\tau_N$$
$$\times\left(\Phi_\beta,\ T\Big\{V(\tau_1)\cdots V(\tau_N)o_{a_1}(x_1)\cdots o_{a_r}(x_r)\Big\}\Phi_\alpha\right)\ . \tag{6.4.6}$$

明確にするために，$x_1^0 \geq x_2^0 \geq \cdots \geq x_r^0$ とする．このとき，x_1^0 より大きい全ての τ を $\tau_{01}\cdots\tau_{0N_0}$，$x_1^0$ と x_2^0 の間の全ての τ を $\tau_{11}\cdots\tau_{1N_1}$ と続け，最後に x_r^0より小さい全ての τ を $\tau_{r1}\cdots\tau_{rN_r}$ と記す．そうする

---

*単一の演算子 O については，これはシュウィンガーの作用原理に相当する．[4]

と, (6.4.6) は以下のようになる.

$$\left[\frac{\delta^r S[\epsilon]}{\delta\epsilon_{a_1}(x_1)\cdots\delta\epsilon_{a_r}(x_r)}\right]_{\epsilon=0} =$$

$$\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-i)^{N+r}}{N!}\sum_{N_0 N_1\cdots N_r}\frac{N!\,\delta_{N,N_0+N_1+\cdots+N_r}}{N_0!N_1!\cdots N_r!}$$

$$\times\int_{x_1^0}^{\infty}d\tau_{01}\cdots d\tau_{0N_0}\int_{x_2^0}^{x_1^0}d\tau_{11}\cdots d\tau_{1N_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_r^0}d\tau_{r1}\cdots d\tau_{rN_r}$$

$$\times\Bigg(\Phi_\beta,\ T\Big\{V(\tau_{01})\cdots V(\tau_{0N_0})\Big\}\,o_{a_1}(x_1)T\Big\{V(\tau_{11})\cdots V(\tau_{1N_1})\Big\}$$

$$\times\, o_{a_2}(x_2)\cdots o_{a_r}(x_r)\,T\Big\{V(\tau_{r1})\cdots V(\tau_{rN_r})\Big\}\Phi_\alpha\Bigg)\,.$$

因子 $N!/N_0!N_1!\cdots N_r!$ は N 個の τ を $N_0,\ N_1,\cdots N_r$個ずつ含む $r+1$ 個の部分集合に分ける仕方の数だ. $N_0+N_1+\cdots+N_r=N$の拘束条件のもとで $N_0,N_1,\cdots,N_r$ について足し, その後で Nについて足す代りに, $(-i)^N$ に現れる N を $N_0+N_1+\cdots+N_r$ にして $N_0,\ N_1,\cdots,N_r$ について独立に足すことができる. これにより以下を得る.

$$\left[\frac{\delta^r S[\epsilon]}{\delta\epsilon_{a_1}(x_1^0)\cdots\delta\epsilon_{a_r}(x_r^0)}\right]_{\epsilon=0} = (-i)^r\Bigg(\Phi_\beta, U(\infty,x_1^0)\,o_{a_1}(x_1)$$

$$\times\, U(x_1^0,x_2^0)\,o_{a_2}(x_2)\,U(x_2^0,x_3^0)\cdots o_{a_r}(x_r)\,U(x_r^0,-\infty)\Phi_\alpha\Bigg)\,. \quad (6.4.7)$$

ここで, 以下の定義を使った.

$$U(t',t)=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{(-i)^N}{N!}\int_t^{t'}d\tau_1\cdots d\tau_N\,T\Big\{V(\tau_1)\cdots V(\tau_N)\Big\}\,. \quad (6.4.8)$$

演算子 $U(t',t)$ は微分方程式,

$$\frac{d}{dt'}U(t',t)=-iV(t')U(t',t) \quad (6.4.9)$$

を満たす. その初期条件は, 明らかに,

$$U(t,t)=1 \quad (6.4.10)$$

だ. これは (6.4.5) の Ω を使った以下の解を持つ.

$$U(t',t)=\exp(iH_0t')\exp(-iH(t'-t))\exp(-iH_0t)=\Omega^{-1}(t')\Omega(t)\ . \tag{6.4.11}$$

(6.4.11) を (6.4.7) に代入して (6.4.4) を使うと, 以下を得る.

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\delta S[\epsilon]}{\delta\epsilon_{a_1}(x_1)\cdots\delta\epsilon_{a_r}(x_r)}\right]_{\epsilon=0}\\&=(-i)^r\Big(\Omega(\infty)\Phi_\beta,\ O_{a_1}(x_1)\cdots O_{a_r}(x_r)\Omega(-\infty)\Phi_\alpha\Big)\ .\end{aligned} \tag{6.4.12}$$

この結果を導く際 $x_1^0\geq x_2^0\geq\cdots\geq x_r^0$ を仮定した. したがって, 右辺の演算子積は時間順序積に置き換えてもよい.

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\delta S[\epsilon]}{\delta\epsilon_{a_1}(x_1)\cdots\delta\epsilon_{a_r}(x_r)}\right]_{\epsilon=0}\\&=(-i)^r\Big(\Omega(\infty)\Phi_\beta,\ T\Big\{O_{a_1}(x_1)\cdots O_{a_r}(x_r)\Big\}\Omega(-\infty)\Phi_\alpha\Big)\ .\end{aligned} \tag{6.4.13}$$

こうすると, 両辺は a と x について完全に対称 (フェルミオンについては反対称) なので, この関係式は時間 $x_1^0\ldots x_r^0$の順序によらず成立する. また, 3.1 節でみたように, ((3.1.12) の意味で) 以下が成立する.

$$\Psi_\beta{}^\pm=\Omega(\mp\infty)\Phi_\beta\ . \tag{6.4.14}$$

したがって, (6.4.13) は望むべき結果 (6.4.3) に一致する.

問題

1. 実のスカラー場 ϕ が (相互作用表示で) $V = g\int d^3x\,\phi(x)^3/3!$ の相互作用をする理論を考える. スカラー・スカラー散乱について, g の 2 次の連結 S 行列要素を全ての積分を実行して計算せよ. この結果を用い, 重心系でのスカラー・スカラー散乱の微分散乱断面積を求めよ.

2. ボソン B の実スカラー場 $\phi(x)$ とフェルミオン F の複素ディラック場 $\psi(x)$ が (相互作用表示で) $V = ig\int d^3x\,\bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)\phi(x)$ の相互作用をする理論を考える. $F^c + B \to F^c + B$, $F + F^c \to F + F^c$, $F^c + F \to B + B$ の過程 (F^c は F の反粒子) について連結した g^2 の次数のファインマン・ダイアグラムを全て書き下し, 対応する S 行列要素を全て計算せよ. 積分は全て行え.

3. 実のスカラー場 $\phi(x)$ が $V = g\int d^3x\,\phi(x)^4/4!$ の相互作用をする理論を考える. スカラー・スカラー散乱の S 行列を g の次数で計算し, その結果を用い微分散乱断面積を求めよ. スカラー・スカラー散乱について g^2 の次数の補正項を, 全ての x 積分を実行して結果を一つの 4 元運動量についての積分として表せ.

4. ディラック場の微分 $\partial_\mu\psi_\ell(x)$ とその共役場 $\psi_m^\dagger(y)$ との縮約からくるファインマン・ダイアグラムへの寄与を求めよ.

5. 問題 1 の理論で, 6.4 節の定理を用い, ハイゼンベルグ表示の演算子の真空期待値 $(\Psi_0, \Phi(x)\Psi_0)$ と $(\Psi_0, T\{\Phi(x), \Phi(y)\}\Psi_0)$ をそれぞれ g と g^2 の次数で求めよ.

参考文献

1. F. J. Dyson, *Phys. Rev.* **75**, 486, 1736 (1949).

2. この結果を形式的に述べたものは**ウィックの定理** (Wick's theorem) と呼ばれている. G. C. Wick, *Phys. Rev.* **80**, 268 (1950) を見よ.

3. この定理を誰が最初に証明したか, 私は知らない. ただ, この定理は1950年代初頭には何人かの理論家に知られていた. その中に, ゲルマンとローもいた.

4. J. Schwinger, *Phys. Rev.* **82**, 914 (1951).

訳者あとがき

本シリーズは, Steven Weinberg 氏の "The Quantum Theory of Fields" I, II, III 巻の日本語訳である.

ここでは, 序文で述べられているように, 極めて現代的視点から場の理論が扱われている. その視点とは, 現在急速に発展しつつある弦理論と, その更に奥にあるかもしれない未知の理論を背景に, 量子力学と特殊相対性理論の基本的要請から場の理論が低エネルギーでそれらの理論の近似理論として必然的に成立するということだ. この観点から, 著者 Weinberg 氏は場の量子論を一歩一歩確実な足取りで組み立てていき, 超対称性などの現代的で重要なテーマへと読者を導く. この意味で, 同じ時期に出た他の場の量子論の本と比べても, この本は非常にユニークなものであるといえる.

原著 I 巻は, 日本語訳では, 1, 2 巻に分冊されている. この 1 巻では, 場の理論自身の構成が詳細に議論され, その後に実際の物理的過程を計算するためのファインマン則が述べられる. 続いて, 2 巻では, 場の理論形式が正準理論, 経路積分と述べられ, くりこみ等が議論される. 読者は, 是非 この 1,2 巻を通して学び, 場の理論の基本的概念を習得されたい.

本シリーズのII巻とIII巻も, 日本語訳ではそれぞれ2冊に分冊した. 原著II巻では, 数多くの, より現代的なトピックについて著者独特の丁寧な議論がなされていて, これは日本語訳 3 巻「場の量子論の現代的諸相」, 4巻「非可換ゲージ理論」, また, 原著III巻では, 超対称性理論が精密に展開されており, 日本語訳 5 巻「超対称性：構成と超対称標準模型」, 6巻「超対称性：非摂動論的効果と拡張」として, それぞれ刊行されている. これら日本語訳2–6巻の目次も，本書の目次の後に掲載したので，そこから，前途にどのようなことが待っているかを読み取っていただきたい. そして，本書において，それらへと進むのに必要な基礎も，学びとっていただきたい.

この本を作るにあたって, 著者 S. Weinberg 氏には幾つかの疑問点について御教示を戴いた. また, Campridge University Press の A. Woollat 氏には原著第 2 刷の LaTeX 原稿を送って戴いた. ここに感謝の意を表したい.

また, 本書の出版に際し, 吉岡書店の上川正二氏, 前田重穂氏に大変お世話になった. ここに記して感謝する.

–第4刷によせて–

2004 年 7 月 訳者

索引

人名

イタリック体のページ番号は「関連書誌」と「参考文献」に引用した文献を示す.

日本語事項

英語事項

ISBN4-8427-0000-9

訳者略歴

青山　秀明（あおやま　ひであき）

1976 年：京都大学理学部物理学科卒

1982 年：カリフォルニア工科大学博士課程修了．Ph.D

1982–1988 年：スタンフォード線形加速器センター理論部研究員，ハーバード大学客員研究員等

1988 年：京都大学理学部助手

1989–1997 年：京都大学教養部・総合人間学部助教授

1998–2003 年：京都大学総合人間学部基礎科学科教授

現在：京都大学大学院理学研究科教授

著書に「力学」(学術図書出版社)

訳書に「物理学演習モスクワの森」(コゼル他編，吉岡書店)(共訳)，「場の理論－統計論的アプローチ」(パリージ著，吉岡書店)(共訳)，「経路積分法」(スワンソン著，吉岡書店)(共訳)

有末　宏明（ありすえ　ひろあき）

1976 年：京都大学理学部物理学科卒

1982 年：京都大学理学博士

1982–1983 年：日本学術振興会奨励研究員

1983–1985 年：京都大学基礎物理学研究所研究員

1985–2000 年：大阪府立工業高等専門学校助教授

2000 年－現在：大阪府立高等専門学校教授

訳書に「Maple V 数学解法辞典」(デビット著，オーム社（共訳))

S. Weinberg：場の量子論（1巻）　粒子と量子場　1997 ©

1997 年 2 月 20 日　第 1 刷発行
2004 年 7 月 25 日　第 4 刷発行

訳　者　青山秀明
　　　　有末宏明
発行者　吉岡　誠

606-8225 京都市左京区田中門前町 87
株式会社 吉岡書店
電話(075)781-4747/振替　01030-8-4624

印刷・製本㈱太洋社

ISBN 4-8427-0262-1

「物理学叢書」刊行に際して

二十世紀の物理学の進歩は，物質の極微の構造の暴露に，物質の精妙な機構の解明に，驚異的な発展，飛躍をもたらした．その結果，新しい自然力の解放，支配を実現化したばかりでなく，新しい物質の創造，生命の謎への挑戦をも企画せしめつつある．更に，既知の自然力の未曾有の強力な駆使さえ可能にしつつある．二十世紀後半に至って，原子力に，あるいはオートメーションに今や第二の産業革命を喚起せんとするに至った原動力は，物理学の開拓的な創造性によることは言をまたない．更に，現在の物理学は，かつての相対論，量子論の出現にも比すべき革命の前夜にあるといわれているこの時に当たり，物理学の新領域の単なる解説，あるいは時局的な技術書ではなく，真にわが国物理学の発展の糧となるべき良書の出版は緊急の必要事といわねばならぬ．ここに「物理学叢書」を編んで世に送る所以である．

この叢書に収められる原著は，いずれもそれぞれの分野の世界的権威者による定評ある名著に限られるが，前述の精神に鑑みその性格，スタイルに特徴あるものを選ぶと共に，その本質において創造的価値高きものを目標とした．

この叢書が，物理学またはその関連分野へ進む学徒に，よき伴侶として用いられ，真にその血肉となり得ることがわれわれの念願であり，更にこの叢書によって伝えられる海外の学風が，広くわが国の教育，研究へのよき刺戟となり，わが国の明日の科学を築く基礎に貢献するところがあれば幸いである．

(1954年12月)

物理学叢書

編集・小谷正雄 / 小林　稔 / 井上　健 / 山本常信 / 高木修二

シッフ　井上　健訳 新版 量子力学 上・下 上 368頁　下 320頁	刊行以来無比の標準的教科書として絶賛を博してきた本書は，原著第3版刊行にともない全面的に版を改めた．基本的な概念やその数学的形式を丁寧に解説されている量子力学の入門書である．
ライフ　中山寿夫・小林祐次訳 統計熱物理学の基礎 上・中・下 上 388頁　中 352頁　下 229頁	統計力学の基礎概念から応用まで体系的に取扱い，初心者が容易に理解できるよう豊富な例題を駆使して懇切丁寧に解説した学部学生向き教科書の決定版．化学・生物の学生にも理解し易い記述である．
ハーケン　松原武生・村尾　剛訳 固体の場の量子論 上・下 ―素励起物理学入門―　上 168頁　下 232頁	教養程度の知識のみで，短期間に系統的に場の量子論の方法と固体論への応用を完全に習得できる．上巻では多くの演習問題で理解を早め，下巻では現在の考え方・モデル・方法などが整然と解説されている．
アシュクロフト，マーミン　松原武生・町田一成訳 固体物理の基礎 (全4巻) 上・I 304頁　下・I 288頁 上・II 272頁　下・II 255頁	学部生にも大学院生にも使えるよう工夫され，内容の取捨選択がしやすく，種々の目的，異なる水準でもうまく使い分けられる．固体物理学の現象の記述と理論的解析による統一という著者の目標は完全に達成されている．
シュッツ　家・二間瀬・観山訳 物理学における幾何学的方法 328頁	本書は近年理論物理学において，極めて基礎的でかつ有効な数学的手法である微分幾何についての教科書である概念を中心に分かり易く解説してあり，物理学への応用も示してある．
J. J. Sakurai　桜井明夫訳 現代の量子力学 上・下 上 392頁　下 320頁	素粒子物理学の独創的理論家であった著者が，UCLA での多年の講義に基づき書き遺した現代的教科書．非相対論的量子力学の核心が，最近の理論・実験の発展に則し，新しい視点から明快かつ具体的に記述されている．

頁数記載なきは品切もしくは未刊

チェイキン，ルベンスキー　松原武生・東辻千枝子他訳 **現代の凝縮系物理学** 上 396頁　下 376頁	凝縮系の物理学を現代的な視点で扱った待望の書．臨界現象とくりこみ群の方法に特に注目し，扱う対象は液体・結晶・不整合結晶・準結晶・非晶質系に及ぶ．250以上の図，多くの演習問題，文献リストを含む．
ワインバーグ　青山秀明・有末宏明訳 **粒子と量子場** 場の量子論シリーズ①　432頁	簡単な歴史的記述から入り，相対性原理と量子力学の理論を用いて素粒子の性質を論じることにより「場の量子論」が自然の帰結として現れてくる．貴重な参考文献であると同時に，教科書として適切である．
ワインバーグ　青山秀明・有末宏明訳 **量子場の理論形式** 場の量子論シリーズ②　446頁	本書はS. Weinbergによる「場の量子論」全6巻の第2巻である．正準形式，ファイマン則，量子電磁理論，経路積分，くりこみ，などの理論形式の核となる部分が論じられる．
ワインバーグ　青山秀明・有末宏明訳 **非可換ゲージ理論** 場の量子論シリーズ③　376頁	現代の素粒子論における標準理論の基礎をなす非可換ゲージ理論が導入され，また場の理論の現代的手法である有効場の理論，くりこみ群，大域的対称性の自発的破れの一般論が展開される．
ワインバーグ　青山秀明・有末宏明訳 **場の量子論の現代的諸相** 場の量子論シリーズ④　342頁	くりこみ群や対称性の破れにとって重要な演算子積展開，電弱理論のゲージ対称性の自発的破れが論じられる．これとは対称的に量子力効果として対称性を破るアノマリーと，それによる物理的結論が述べられる．
ワインバーグ　青山・有末・杉山訳 **超対称性：構成と超対称標準模型** 場の量子論シリーズ⑤　380頁	最初に超対称性の歴史について述べ，超対称性代数を構成する．その後，超対称性を持つ場の理論，ゲージ理論を構成し，それらに基づき，標準模型を超対称性を持つように拡張した模型を調べる．
ワインバーグ　青山・有末・杉山訳 **超対称性：非摂動論的効果と拡張** 場の量子論シリーズ⑥　268頁	本書では，超対称性の非摂動論的局面と，超対称性の超重力への拡張，高次元での一般論等を述べ，Pブレーンに関係した最近の話題にも触れ，本シリーズの締めくくりにふさわしい意欲的な内容となっている．
Y. イムリー　樺沢宇紀訳 **メソスコピック物理入門** 314頁	固体電子の局在と緩和の一般論，典型的な題材である微細な系の永久電流と量子輸送，量子ホール効果，超伝導メソスコピック系，および雑音の問題を著者一流の観点から論じる．
S. A. サフラン　好村滋行訳 **コロイドの物理学** —表面・界面・膜面の熱統計力学—　368頁	熱統計力学の立場から新たに捉え直した世界的にユニークな書である．界面張力，ラフニング転移，ぬれ，界面間の相互作用，膜弾性，自己会合などの問題を扱う，学部3・4年から大学院生以上の学生などを対象とする．
スタウファー，アハロニー　小田垣孝訳 **パーコレーションの基本原理** (原書第2版・修訂版)　332頁	初版以来多くの発見およびより精密な数値データが加えられ，さらに新たに導入された概念が含められている．また演習が付け加えられ，教科書としてさらに使いやすくなっている．
デュラン　中西　秀・奥村　剛訳 **粉粒体の物理学** —砂と粉と粒子の世界への誘い—　310頁	初等的な力学から解き起こし，最近の研究の成果までを初学者にもわかるようにまとめている．物理学の立場から書かれた粉粒体の教科書としては，(驚くべきことに)本書はほとんど唯一のものであろう．

＜別　巻＞

井上　健監修・三枝寿勝・瀬藤憲昭著
量子力学演習
―シッフの問題解説―　392頁

理論的基礎に重点をおきながら，実験・技術を志ざす学生にも容易に理解できる演習書たるべく，代表的教科書として定評あるシッフの同書より，章末の各問題を詳細に解説した．

井上　健監修・瀬藤憲昭・吉田俊博著
古典力学の問題と解説
―ゴールドスタイン（第2版）に基づいて―　434頁

近代的な量子力学・場の理論・物性論を学ぶ際の踏み台として，古典力学を新しい見地から解説された，一般力学の標準的教科書と，誉れの高いゴールドスタイン（第2版）の章末の問題を詳細に解説した最新の演習書．

大槻義彦監修・飯高敏晃他著
演習現代の量子力学
―J. J. サクライの問題解説―　336頁

本書は，J. J. サクライの教科書「現代の量子力学」の章末問題の解説である．この解説は1991年度，早稲田大学の物理学科，応用物理学科のはじめて量子力学を学ぶ学部3年生を対象に行った演習に基づいている．

F. クローズ　井上　健訳・九後汰一郎補遺
訂正増補 **宇宙という名の玉ねぎ**
―クォーク達と宇宙の素性―　268頁

物質の根源の姿を追求してきた今世紀の素粒子物理学の，心躍る発見と認識の深化のプロセスを読者に追体験させてくれる．数式を用いずに一般向けに解説．前著に「その後の発展と歴史的経緯に対する補遺」追加．

＜単行本＞

スティーブンス　早田次郎訳
現代物理を学ぶための **理論物理学**
292頁

予備知識はほとんど仮定されておらず，必要とされる数学的知識は最初の章にまとめて解説されている．式の導出は非常に丁寧で，物理を学ぼうとする人が現代物理の基礎を学ぶためには絶好の書である．

増補版　高橋光一著
宇宙・物質・生命
―進化への物理的アプローチ―　224頁

著者の長年にわたる教養教育課程の講義の中から生まれた．宇宙誕生から生物進化までの解明に物理学が果たした役割と，進化論に科学がどのようにかかわってきたのかを物理的視点から眺める．教養教科書として最適．

日置善郎著
場の量子論
―摂動計算の基礎―　176頁

相対論的な場の量子論の基本的な構成がスケッチされるとともに，主要な計算方法である共変的な摂動論の基礎が，幾つかの具体的な計算例とともに丁寧に解説される．場の量子論・摂動計算の公式集の価値がある．

花井哲也著
不均質構造と誘電率
―物質をこわさずに内部構造を探る―　316頁

個々の工業生産物や生物細胞などについて，処理解析の技法，結果の実用的解釈の仕方の実際例などを初心者にも理解できるよう解説．化学・工業生産の技術分野の技術者・研究者には待望の書である．

日置善郎著
量子力学
―その基本的な構成―　192頁

量子力学への軟着陸を目指す入門書であり，一刻も早く量子力学に触れてみたいと思っている1・2年生，量子力学のある程度の知識・理解が要求される分野の2～4年生などを想定している．

西田迪雄著
気体力学
232頁

本書の特色は，常温から高温まで扱える気体力学を記述していることである．前半では巨視的観点から述べ，学部学生を対象とし，後半は微視的観点に基づく記述となり，主に大学院生を対象とする．教科書として最適．